मराठी ज्योतिर्गणित पुस्तकावलि

पुस्तक चवथें

(आकर्षणशास्त्र)

गोलद्वयप्रश्नविमर्श

(Problem of two bodies)

लेखक

वेंकटेश बापूजी केतकर,

ज्योतिर्गणित—केतकी—वैजयन्ती

सौरार्यब्राह्मतिथिगणित (सं)

ग्रहगणित—नक्षत्रविज्ञान

सूर्यग्रहण (मराठी)

क्रोनालाजी (इंग्रजी)

ग्रंथांचे

कर्ते

किंमत दोन रुपये.

प्रकाशकाची प्रस्तावना

॥ ब्रह्मांडीं सर्व वस्तू, ग्रह, उडुगणही, सर्वदा एकमेकां ॥
॥ कोण्या रीतीं कितीसें, कवण, कुठवरी कर्षिती ते व तें कां ॥
॥ याच्या गूढा रहस्या कथन करि असा एक ना ग्रंथ जो कीं ॥
॥ महाराष्ट्रीय भाषीं, म्हणुनि रचियला वेंकटें हा विलोकीं ॥

प्रस्तुत ग्रंथ १९१८ सालींच लिहून तयार होता. आज सोळा वर्षांनीं तो आम्हीं प्रसिद्ध करीत आहों. भरत खंडात आजपर्यंत आकर्षण-शास्त्रावर एकही ग्रंथ झालेला नाहीं. यावरूनच याची योग्यता व्यक्त होते.

केतकी, वैजयंती, ज्योतिर्गणित, परिशिष्ट, नक्षत्रविज्ञान, मराठी-ग्रहगणित हे **सहा** ग्रंथ वडिलांनीं प्रसिद्ध केले. त्यानंतर, **सौरार्यब्राह्म-तिथिगणित, शास्त्रशुद्धपंचांग अयनांशनिर्णय, वैजयंती द्वितीय आवृत्ति, भारतभूमंडलीय सूर्यग्रहण, सपरिशिष्ट व सभाष्य केतकी, गोलद्वय प्रश्न विमर्श**, व भागत्रयात्मक केतकरचरित्र असे हे **सात ग्रंथ** १९२७ ते १९३४ वर्षा अखेर, केवळ **स्वतःच्या** जबाबदारीवर, **छाप-विले**. किती त्रास झाला हें कोणास सांगावयाचें? ज्योतिःशास्त्रासारखा दिव्य विषय, शास्त्रपराङ्मुख जनता, अत्यल्प गिऱ्हाईक, लायब्ऱ्यांची आत्यंतिक उदासीनता, श्रीमंतांची भिन्न रुचि, धनवंतांची अरुचि, कांहींची आत्म-संतुष्टता तर इतरांचें दुर्लक्ष्य व आमचा स्वतःचा द्रव्याभाव, इतक्या दुस्तर संकटांना बाजूस सारून वडिलांचे सर्व ग्रंथ प्रकट करूं शकलों यांतच मला आनंद आहे. ग्रंथप्रसिद्धीच्या कामीं जरी आम्हांला प्रत्येक प्रसंगीं कर्जभार करावा लागला तरी—

॥ तातांनीं खचरप्रबंध रचिले दिव्यप्रभावें महा— ॥
॥ कष्टें मुद्रियले, उपाय हरला कर्जादिकांनीं सहा ॥
॥ आम्हींही मग कर्जभार करुनी अत्यंत चिंतावहा ॥
॥ सप्त ग्रंथ विमुद्रिले, मिळविली पितृर्णमुक्ती महा ॥

आम्हीं पितृऋणमुक्ती मिळविली हा केवढा आनंदाचा प्रसंग. असो.

आर्यभूषण प्रेसचे म्यानेजर रा. रा. **अनंत विनायक पटवर्धन**, बी. ए. यांच्या देखरेखीखालीं प्रस्तुत ग्रंथ मुद्रित होऊन बाहेर पडत आहे एवढें सांगितलें म्हणजे त्यांत सर्व आलें. त्यांची सहानुभूति व धोरण प्रशंसनीय आहे. त्यांच्या सहनशीलतेनें आम्हांला ऋणीं करून ठेविलें आहे.

२३-१२-१९३४
विजापूर

प्रकाशक
दत्तात्रेय वेंकटेश केतकर

ग्रंथलेखकांची प्रस्तावना

ग्रहगतीच्या आकर्षणीय उपपत्तीचें निरूपण करणारा, असा मराठी भाषेंत हा पहिलाच ग्रन्थ आहे, असें म्हटल्यास चालेल. मध्योत्सारिणी व मध्याभिगामिनी, या दोन प्रेरणांमुळें, ग्रह सूर्याभोंवतीं फिरतात या विधानापेक्षां जास्त माहिती करून देणारा ग्रंथ मराठींत किंवा दुसऱ्या कोणत्याही देशी भाषेंत लिहिला असल्याचें आमच्या पहाण्यांत किंवा ऐकिवांत नाहीं. **इंग्लिश** व **फ्रेंच** भाषांत जे औपपत्तिक ग्रन्थ आहेत, ते पारमाण्विक (*Infinitisimal Calculus*) पद्धतीनें रचलेले असून उच्च गणितकोविदांस मात्र ते अवगम्य आहेत. तशांत अशा प्रकारचें उच्च ज्यौतिषिक ज्ञान देणारें, असें या भरतखंडांत एकही विश्वविद्यालय नाहीं. इतकेंच नव्हे तर या बुद्धिविकासी गणित व ज्योतिष विषयाचें अलीकडे क्रमानें विद्यालयांतून **उच्चाटन** होत आहे, ही खेदाची गोष्ट आहे.

ग्रहगतीच्या भूमितीय उपपत्तीचें विवेचन, आम्हीं आमच्या मराठी ग्रहगणितांत सविस्तर केलें आहेच. त्याची वरील पायरी म्हणजे ग्रहगत्युत्पादक भौतिक (*Physical*) कारणाचें विवेचन होय. **यालाच आकर्षणशास्त्र म्हणतात.** विवेचनसौकर्यासाठीं, या शास्त्राचे **गोलद्वयप्रश्नविमर्श** व **गोलत्रयप्रश्नविमर्श,** असे दोन भाग करावे लागतात. पुन्हां या प्रत्येक विभागाची विवेचनपद्धति भूमितीय व पारमाण्विक अशी द्विविध असते. दुसरीपेक्षां पहिली पद्धति कांहींशी बोजड व पल्लवित असली तरी, अल्पज्ञ विद्यार्थ्यांना ती सुगम आहे. आणि या पद्धतीला साधनीभूत अशा बीजगणित, भूमिती, त्रिकोणमिती, शंकुच्छिन्न, या विषयांवर मराठींत सुदैवानें ग्रंथ झाले आहेत. म्हणून वर्तमान परिस्थितीकडे लक्ष्य देऊन, या पहिल्या विभागाचें विवेचन पहिल्या पद्धतीनेंच येथें केलें आहे.

या आकर्षणशास्त्राचा मूळ प्रवर्तक, जो महातत्त्ववेत्ता **न्यूटन,** यानें आपल्या (*Principia*) **प्रिन्सिपिया** नांवाच्या शिरोमणि ग्रंथांत हीच विवेचनपद्धति स्वीकारिली आहे. त्याच्या वेळीं पारमाण्विक गणितशास्त्र अस्तित्वांत नव्हतें. आम्हीं सदर प्रिन्सिपियाच्या पहिल्या तीन खंडांच्या आधारें, हा **गोलद्वय**प्रश्नविमर्श नांवाचा प्रबंध रचिला आहे. यांत आमच्या वाचकांस

रली आहे. विषयविवेचन, जरी बैजिकरीतीनें केलें आहे, तरी शक्य असेल तेथें, सांख्य उदाहरणें देऊन, विषय ज्ञान अधिक दृढ व मनोहारी केलें आहे. विवेचनांतील दृष्टांत व उदाहरणें हीं वाचकांच्या रोजच्या पाहण्यांत येणारीं अशींच दिलीं आहेत. अलीकडील पाश्चात्य गणित ग्रन्थांतील विवेचन, वाचकांची ज्ञानसामुग्री ग्रन्थकारांच्या ज्ञानसामुग्रीसमान आहे, असें गृहीत धरून प्रायः केलेलें असतें. त्यामुळें सिद्धतेंतील आवश्यक पायऱ्या बऱ्याच ठिकाणीं गाळल्या असतात. व पूर्वोत्तर पायऱ्यांचा, किंवा समीकरणांच्या रूपांतराचा, संबंध दर्शक सूचनाही दिलेल्या नसतात. यामुळें अल्पज्ञ विद्यार्थी व वाचक बुचकळ्यांत पडून, त्यांना कांहीं समजेनासें होतें व प्रत्येक पायरी म्हणजे त्यांना एकेक कोडेंच वाटतें. अशा अडचणींत मदत करणारे गुरूही भेटत नाहींत. या कारणामुळें विद्यार्थी कितीही उत्सुक असला तरी तो हताश होऊन, या विषयाचा नाद सोडून देतो. अशा प्रकारचा अनुभव आम्हांस आला आहे. म्हणून आम्हीं पूर्वोक्त उणीवा या निबंधांत राहू दिल्या नाहींत. इतकेंच नव्हे तर बऱ्याच प्रसंगीं मुद्दाम द्विरुक्तीही, वाचकानुकंपेस्तव व दृढीकरणास्तव होऊं दिली आहे.

ग्रहगणितांत व या पुस्तकांत आम्हीं इंग्रजी व ग्रीक सांकेतिक अक्षरांचा उपयोग केला आहे यामुळें, या पुस्तकाच्या मराठीपणाला गौणत्व येतें असें म्हणणारे कांहीं गृहस्थ आहेत. पण त्यांची ही समजूत कोती आहे. कारण सांकेतिक अक्षरें जर स्पष्ट निराळीं दिसणें अगत्याचें आहे तर तीं भाषा, लिपीहून बरींच भिन्न असलीं पाहिजे. हें जाणून पाश्चिमात्यांच्या ग्रंथांत रोमन व ग्रीक जुन्या जर्मन अक्षरांचा उपयोग केला असतो. इकडे कानडी लिपींत छापलेल्या भूमितींत देवनागरी अक्षरांचा उपयोग केलेला, व मराठी भूमितींत मोडी सांकेतिक अक्षरांचा उपयोग केलेला पाहण्यांत येतो. ही गोष्टही विचारविहितच आहे. दुसरी गोष्ट अशी कीं ज्या समीकरणांत अक्षरें इंग्रजी आहेत, त्यांतील अंकही इंग्रजी असणें सारूप्यदृष्ट्या योग्य आहे. अरबांनीं आमची अंकलिपी १० व्या शतकांत स्वीकारून, तिला रकमहिंदी हें नांव दिलें आणि १३ व्या खिस्ती शतकाच्या प्रारंभीं पाश्चात्यांनीं (*Leonardsof Pisa* यानें बार्बरीदेशांत ट्युनीस येथें असतांनां) तिचा स्वीकार करून तिला "अराबिक न्युमरल्स" हें नांव दिलें. या ऐतिह्यावरून, असें सिद्ध होतें कीं, पाश्चात्यांचे अंक, आमच्या अंकांचे वंशज

आहेत. म्हणून त्यांचा स्वीकार करणें म्हणजे पतितपरावर्तनासारखें गौण नव्हे, तर देशांतरास जाऊन दिग्विजय करून आल्याबद्दल त्यांचें अभिनंदन करणें होय.

आणखी एक गोष्ट अशी आहे कीं, पाश्चात्यांनीं ज्योतिःशास्त्राची मर्यादा आम्हांपेक्षां शंभरपट वाढविली आहे. म्हणून आमचें ज्योतिषज्ञान वाढविण्याचें असेल तर, त्यांच्या ग्रंथांचें परिशीलन आम्हांस केलेंच पाहिजे. आकर्षण (F), द्रव्य (M), केंद्रच्युति (e) गुरुत्वाकर्षण (g), आकर्षणाचें मूलमान (μ), व्यासपरिधिगुणोत्तर (π,), इत्यादि शेंकडों सांकेतिक अक्षरें, इंग्लीश, फ्रेंच, जर्मन, स्पॅनिश, अमेरिकन या सर्व भाषेंतील ज्योतिष उद्ग्रंथांत, विचारविनिमयसौकर्यार्थ सारखींच वापरलीं असतात. म्हणून आमची कूपमंडूकवृत्ति सोडून देऊन पुढें ज्ञानसंपादनाच्या कामीं लिहिलेल्या महत्तत्त्वाचें इतःपर तरी, आपण अवलंबन केलें पाहिजे.

अयं निजः परो वेति गणना लघुचेतसाम् ।
उदारचरितानां तु वसुधैव कुटुंबकम् ॥

हा गोलद्वयप्रश्नविमर्शनिबंध आम्हीं पारमाण्विक पद्धतीनेंही रचला आहे. आणि गोलत्रयविमर्शांतील 'चांद्री गत्युपपत्ति'(*The Lunar Theory*) लिहिण्याची आमची तयारी आहे. परंतु असे ग्रंथ छापून बाहेर पडणें, द्रव्यसाहाय्यावर मुख्यत्वें अवलंबून असतें हें सांगणें नकोच. असो. विद्वान् देशबांधव या निबंधांतील गुणदोषांचें आविष्करण निःपक्षपातबुद्धीनें करून, याच्या योग्यतेनुसार याचा स्वीकार करतील व तेणेंकरून पूर्वोक्त उद्ग्रंथ लिहिण्यास आम्हांस प्रोत्साहन देतील अशी आशा प्रकट करून ही प्रस्तावना संपवितों.

श्रीयुत रा. रा. नरहर वेंकटेश कोल्हटकर बी. ए., बी. एस्सी., धारवाड ट्रेनिंगकालेजांतील शिक्षक यांनीं पूर्वीं ग्रहगणिताच्या कामीं जशी आम्हांस मदत केली, तशी यावेळींही मनःपूर्वक झटून मदत केल्याबद्दल आम्ही सप्रेम आभार मानितों. त्याचप्रमाणें रा. रा. नेर्लेकर सदर कॉलेजांतील ड्राईंग मास्तर, यांनीं पुस्तकांतील आकृति सुरेख काढून दिल्याबद्दल त्यांचेही आम्ही आभार मानितों.

धारवाड
ता. १५ जून १९१८

ग्रंथकार
वेंकटेश बापूजी केतकर.

अनुक्रमणिका.

(टीप-कंसांतील अंक लेखांक आहेत.)

प्रकरण ६ वें—**केप्लरचा दुसरा नियम** (३९–४३):—ग्रहांचे मंदकर्ण सूर्याभोंवतीं सारख्या कालांत सारख्या क्षेत्रावरून जातात, म्हणजे त्यांनीं चालून गेलेलीं क्षेत्रें चालून जाण्यास लागणाऱ्या काळाच्या सम-प्रमाणांत असतात. या नियमाची उपपत्ति (३८–४१). गोलद्वयापुरता विचार केला तर ग्रहकक्षेची पातळी अचल असते (४२); ग्रहाचा वेग त्याच्या तात्कालिक स्थानीय स्पर्शरेषेवर सूर्यापासून काढलेल्या लंबाच्या व्यस्त प्रमाणांत असतो (४३).

प्रकरण ७ वें—**बैंदव भूमिति, अंतिम गुणोत्तर, व पराकाष्ठाः**— बिंदु, सरळ व वक्ररेषा, वक्रतादर्शक वर्तुळ (४४–४६); परमाणुगणिताची मूल कल्पना (४७); वर्तुळाची व दीर्घवर्तुळाची वक्रता (४८–४९); वक्रतादर्शक वर्तुळ (५०); अंतिम गुणोत्तर (५१); पराकाष्ठा (५२); वर्तुलाच्या परिघांतील बिंदूपासून त्याच्या क्षेत्रांतील इष्टबिंदू-मधून गेलेली ज्या व तिची संमुखी रेषा यांचा संबंध (५३).

प्रकरण ८ वें—**तात्कालिक वर्तुल व शंकुच्छिन्न यांचा संबंध** (५४–५९):— दीर्घवर्तुलाच्या मध्याबिंदूतून पार जाणारी तात्कालिक वृत्ताची ज्या PCX इची लांबी (५५). तात्कालिक वृत्ताचा व्यास PFV, (५६); फोंकसांतून जाणारी ज्या PSZ, (५७); पराबलेच्या फोंकसांतून जाणारी तात्कालिक वृत्तज्या PSW. (५८); तिच्या तात्कालिक वृत्ताचा व्यास PBX, (५९).

प्रकरण ९ वें:—**आकर्षण, अंतर, पतन व क्षेत्र यांनीं युक्त असें ग्रहगतीचें सर्वसाधारण समीकरण** (६०–६२):—g या गुरुत्वाकर्षणाच्या सूत्रावरून F व SP यांचा संबंध दाखविणारें समीकरण उत्पन्न करणें, (६०); QR/QT^2 याच्या स्थिरत्वाचा परिणाम, (६१); आकर्षण, वेग व फोंकसांतून जाणारी तात्कालीक वृत्तज्या यांचा संबंध दाखविणारें समीकरण (६२).

प्रकरण १० वें:—**शंकुच्छिन्नांत** $QR/QT^2 = 1 \div L$ असें असतें. (६३–६४):—दीर्घवर्तुल व हैपरबला यांमध्यें $QR/QT^2 = 2BC^2/SP$, (६३); पराबलेंत $QR/QT^2 = 4\,SP$, (६४).

प्रकरण ११ वें—**फोंकसांतून घडणारें आकर्षण अंतराच्या व्यस्त प्रमाणांत बदलतें** (६५–७०):—पाषाण व चंद्र यांच्या पतनावरून या नियमाची सत्यता (६६–६७). केप्लरच्या पहिल्या व तिसऱ्या नियमाची उपपत्ति (६८–७०).

प्रकरण १२ वें—**शंकुच्छिन्न कक्षेंत फिरणाऱ्या ग्रहांचा व धूमकेतूंचा वेग** (७१–७७):— वेग, आकर्षण, व तात्कालिक वृत्तज्या यांचा संबंध (७३. समी ५); वेग, आकर्षण व पतन यांचा संबंध (७३. समी. ६); पतन व फोंकसज्या यांचा संबंध (७३. समी. ७); कक्षाकृतिपरत्वें वेगांचीं समीकरणें व मंगळाचें उदाहरण (७४); दीर्घवर्तुळ, हैपरबला व पराबला यांतील वेग व तितक्याच अंतरावरील वर्तुळांतील वेग यांची तुलना (७५); कक्षांच्या आकारांचा ग्रहांच्या वेगांशीं संबंध; ग्रहांच्या आकर्षणाचा धूमकेतूंच्या कक्षेच्या आकारावर होणारा परिणाम. ग्रहांकडून धूमकेतूचें पकडलें जाणें (७६) कोणीय वेग (७७).

प्रकरण १३ वें—**अज्ञात कक्षेच्या ऋज्वीवरून कक्षानिर्णय** (७८–८७);– L, h, व μ, यांचीं समीकरणें (८१); कक्षेला नियत आकार देणाऱ्या अटी (८३), आकर्षण व प्रकाश यांचें साधर्म्य (८४); कक्षेच्या आकाराचा निर्णय (८५) कक्षापरिलेख (८६); शंकुछिन्नाकृतीच्या मुख्य अटी (८७), मंगळ ग्रहाच्या कक्षेच्या निर्णयाचें सांख्य उदाहरण (८८–९१)

प्रकरण १४ वें:—**अज्ञात कक्षेंतील पतनावरून कक्षानिर्णय** (९२–९७):–कोणीय वेग व रेखीय वेग यांचा संबंध (९३); रेखीय वेग व पतन यांचा संबंध (९३. समी. २); या पतनावरून अज्ञात कक्षादर्शक दीर्घवर्तुळ काढणें. (९४–९५); अज्ञात कक्षेचीं मूलमानें म्हणजे, ऋज्वी, ग्रहापासून उच्च फोंकसापर्यंत अंतर, केंद्रच्युति, उच्चाचा भोग, मन्दकेन्द्र, प्रदक्षिणाकाल,इत्यादिकांचीं समीकरणें सिद्ध करणें(९६). मंगळाचें उदाहरण.

प्रकरण १५ वें—**आकर्षणाचा उगम मध्य बिंदूंत असून दीर्घवर्तुल कक्षेंत फिरणाऱ्या पदार्थावरील आकर्षणाचा नियम** (९८–१००):— अशा परिस्थितींत आकर्षण अंतराच्या सरळ प्रमाणांत बदलतें, याची सिद्धता. वेग, प्रदक्षिणाकाल यांचीं समीकरणें. (९८); अशा प्रकारचें आकर्षण सूर्यसंस्थेंत असतें तर ग्रहगतीसंबंधानें दिसून येणारे चमत्कार; अखिल ब्रह्मांडांत आकर्षणाचा नियम अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणाचाच आहे (९९); आंदोलन हें अशाच परिस्थितींतील रेखीभूत दीर्घवर्तुलांतील भ्रमण आहे. प्रयोग (१००).

ज्योतिषाचार्य
वेंकटेश बापूजी केतकर

जन्म १८-१-१८५४]  [मृत्यु ३-८-१९३०

॥ श्री ॥

आकर्षणशास्त्र.

गोलद्वय-प्रश्न-विमर्श.

(भूमितिपद्धति).

प्रकरण १ लें.

साधारण विचार.

(१) आमच्या मराठी ग्रहगणितांत, पृष्ठ १०३ येथें, केप्लरनें ग्रहगतिसंबंधीं, केवळ ग्रहांच्या वेधांवरून काढलेले तीन नियम दिले आहेत. त्या तीन नियमांची सत्यता गृहीत धरून, त्यांच्या आधारें आम्हीं ग्रहगणिताची रचना केली आहे. त्या तीन नियमांची उपपत्ति देणें हाच गोलद्वय-प्रश्न-विमर्शाचा मुख्य व स्वतंत्र विषय असल्यामुळें हें काम त्यावेळीं बाजूस ठेवावें लागलें. ज्यांना ग्रहगणिताची उपपत्ति चांगली समजली आहे, त्यांना केप्लरच्या नियमांची उपपत्ति समजून घेण्याची उत्कंठा होणें, अगदीं स्वाभाविक आहे. म्हणून पूर्वोक्त बाजूस ठेवलेलें काम आतां हातीं घेण्याचें योजिलें आहे.

केप्लरचे ग्रहगतिविषयक **तीन** नियम असे आहेत:—

१ ला नियमः—सर्व ग्रहांच्या कक्षा दीर्घवर्तुलाकार आहेत आणि त्या कक्षांच्या एका नाभींत (फोकसांत) सूर्याचा मध्य असतो. (पहा लेख ६८).

२ रा नियमः—ग्रह सूर्याभोंवतीं फिरत असतां, त्यांचे मंदकर्ण, सारख्या कालांत, सारख्या क्षेत्रावरून जातात. (पहा ले. ३९, ४०.)

३ रा नियमः—ग्रहांचे प्रदक्षिणाकालांचे वर्ग, त्यांच्या मध्यम-मंदकर्णांच्या घनाच्या प्रमाणांत असतात. मध्यम-मंदकर्ण म्हणजे, सूर्यापासून ग्रहापर्यंत मध्यमांतर. (पहा ले. ३६. ७०.)

(२) पृथ्वी आपल्या पृष्ठाजवळच्या सर्व पदार्थांना, आपल्याकडे सर्वकाल ओढीत असते, ही गोष्ट फार प्राचीनकालापासून भरतखंडांतील ज्योतिर्विदांस माहीत होती.

" आकर्षशक्तिश्च मही तया यत् खस्थं गुरु स्वाभिमुखं स्वशक्त्या ।
आकृष्यते तत्पततीव भाति समे समंतात् क्व पतत्वियं खे ॥ "

असें **श्रीभास्कराचार्यांनीं** ८०० शें वर्षांपूर्वीच आपल्या **सिद्धांतशिरोमणींत** (गोलाध्याय भुवनकोश श्लोक ६) म्हटलें आहे. परंतु आकर्षणाचा जोर सर्वत्र समान असतो, किंवा आकर्षक पदार्थांच्या दूरत्वाप्रमाणें, कमी जास्ती होतो? ग्रह सूर्याभोंवतीं कां फिरतात ? ग्रहांच्या उच्चांस व पातांस गति कां उत्पन्न होते ? वगैरे अत्याश्चर्यकर गोष्टींचें ज्ञान, **न्यूटन** जन्मास येण्यापूर्वीं कोणां-सही नव्हतें. होरोक्स हा **न्यूटनाचा** समकालीन असून, **आकर्षण, आक-र्षकाच्या दूरत्वाच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असतें,** ही गोष्ट त्यानें **न्यूटना**पेक्षांही पूर्वीं प्रसिद्ध केली, यांत संशय नाहीं; तथापि या गोष्टीची सिद्धता त्याला करितां आली नाहीं. हें बिकट काम **न्यूटननेंच** आपल्या " **प्रिन्सिपिया** " नांवाच्या अमरग्रन्थांत कसें तडीस नेलें तें पुढील उद्घा-टनांवरून वाचकांच्या लक्षांत येईल. (पहा प्रकरणें ६–११).

(३) या कामीं न्यूटननें आद्य व अंतिम प्रमाणें, किंवा गुणोत्तरें, (*Prime and Ultimate ratios*) या मूलतत्त्वांचा उपयोग केला आहे. वर्तुळाचा भाग म्हणजे कंस, अत्यंत लहान असतांना, (म्हणजे त्याच्या आद्यावस्थेंत किंवा संहितावस्थेंत) कंस, त्याची ज्या, भुजज्या, व स्पर्शरेषा, आणि स्पर्शरेषा व वर्तुल कंस, यांच्या दरम्यान आणखी एकादा कमी वक्रतेचा कंस हीं असतील तर, या चोहोंचें प्रमाण समान असतें. म्हणजे या चोहोंची लांबी समान असते. (पहा ले. ५१ आकृति १३.). कंस पुढें वाढत जातो तसतशीं त्यांचीं परस्परांशीं गुणोत्तरें अनियमितपणें वाढत जातात. हीं गुणोत्तरें अनियमितपणें वाढत गेलीं असलीं तरी त्यांच्या वाढीस कांहीं मर्यादा असते. ज्या (*Chord*) आणि कंस (*arc*) यांची

वाढ अनियमितपणें असली तरी त्यांचें गुणोत्तर, १·५७०८ यापेक्षां जास्त कधींही होऊं शकत नाहीं. यांनां **अंतिम गुणोत्तरें** म्हणतात.

(४) भूमितिगणित व ज्योतिःशास्त्र हे दोन्ही द्दग्विषय आहेत. पहिलें साधन असून दुसरें साध्य आहे पण या साधनाची शक्ति मर्यादित आहे. भूमितीचा पल्ला फार तर वर्ग व वर्गमूळापर्यंत पोंहोचतो. जेव्हां गणितांत घन, चतुर्घात इत्यादि उच्चतर राशि येऊं लागतात, तेव्हां भूमितीला हात टेकावे लागतात. अशा प्रसंगीं **बैजिक भूमिति** (*algebraic Geometry*) इचा उपयोग फार होतो. हिची वरची पायरी म्हणजे, **परमाणुगणित** (*Infinitesimal Calculus*). या परमाणुगणिताचा आद्य प्रवर्तक, **लिब्निट्झ** नांवाचा होऊन गेला. हा **जर्मन** होता. याच्यानंतर **क्लेरो**, **लाग्रांज लाप्लास**, **पॉंकारे**, **न्यूकंब** या गाणितिकांनीं या उच्च गणिताचा उपयोग, ज्योतिःशास्त्रांतील अत्यंत कठीण प्रश्नांचा भेद करण्याच्या कामीं करून, हें शास्त्र अत्यंत प्रौढदशेस पोंचविलें आहे.

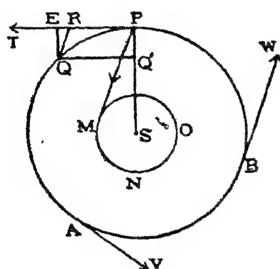
(५) हें पुस्तक **न्यूटन**च्या प्रिन्सिपिया ग्रंथाच्या आधारेंच रचिलें आहे. आणि यांतील उद्घाटनामध्यें, न्यूटनच्या आद्य व अंतिम गुणोत्तरांचा व भूमिति व शंकुच्छिन्न यांचा आधार घेतला आहे. कोणताही प्रश्न, भूमिति रीत्या सोडविला तर, ती सिद्धता मनावर चांगली ठसते, व मनाला समाधान वाटतें. पण प्रायः ही पद्धती लांबलचक असल्यामुळें, हिचा कंटाळा येतो. बैजिक भूमितीनें बिकट प्रश्न फारच लवकर सोडवितां येतात. परंतु तिचा उपयोग करणाऱ्याची स्थिति तेल्याच्या घाण्याच्या बैलाच्या स्थिती-सारखी असते. भूमितिपद्धतींत कार्यकारण परंपरा डोळ्यापुढें उभी असते. बैजिक पद्धतींत समीकरणाच्या सत्यतेकडे लक्ष असलें म्हणजे पुरे. अमक्या अंकानें कां गुणावें ? किंवा कां भागावें ? अशा प्रश्नांस एकच उत्तर. तें कोणतें तर तसें केलें तरच तें समीकरण सुटतें, एरवीं तें सुटत नाहीं. परंतु उपपत्तीच्या ज्ञानामुळें, ज्या गाणितिकांची अंतर्दृष्टि तीक्ष्ण झाली असते, अशांनां सर्व कांहीं स्पष्ट दिसत असतें.

ज्याप्रमाणें व्याकरणाचे नियम उदाहरणांशिवाय स्पष्ट कळत नाहींत, त्याप्रमाणेंच आकर्षणासंबंधीं, या पुस्तकांत, जे नियम अक्षरांचा व चिन्हांचा उपयोग करून सिद्ध केले आहेत, ते शक्य असेल तेथें **सांख्य उदाहरणांनीं** विशद केले आहेत.

प्रकरण २ रें.

विषयोपक्रम.

(६) ग्रह सूर्याभोंवतीं कां कसे फिरतात, या गोष्टींचें ज्ञान थोडक्यांत मिळवूं इच्छिणाऱ्यांनीं, शेत राखणारे लोक गोफिणीनें दगड कसा फेंकतात तें पहावें. दगड गोफिणींत असेपर्यंत, वर्तुळाकार मार्गानें फिरत असतो व तींतून सुटतांच तो सरळ रेषेनें जातो, ही गोष्ट सर्वांच्या पाहण्यांत आहेच.



(आकृति १.)

(आकृति १ पहा) या आकृतींत बाहेरील वर्तुल, गोफिणींत फिरणाऱ्या दगडाचा मार्ग आहे. P या दगडाला वर्तुलाकार गति देण्यासाठीं PM गोफिणीची दोन्ही टोंकें M या उजव्या मुठींत धरून, MNO या लहान वर्तुलांत मूठ गरागरा जोरानें फिरवावी लागते. PT, PM, या अनुक्रमें, मोठ्या व लहान वर्तुळांना, स्पर्शरेषा काढल्या आहत. आणि QR ही MP ला समांतर आहे. Q बिंदु PAB परिघावर P पासून अत्यंत समीप आहे, असें समजून, QE रेषा, PT रेषेवर लंब काढली आहे.

आतां P दगड PAB वर्तुलांत एका सेकंदांत फिरतो, आणि PQ कंस, PAB वर्तुलपरिघाचा दशमांश आहे, असें मानलें तर P दगडाचा वेग, PT स्पर्शरेषेच्या दिशेंत एक दशमांश सेकंदांत, PR रेषेएवढा आहे, असें म्हणतां येईल. या वेगाला **प्रक्षेपप्रेरणा** (*Force of Projection*) किंवा **मध्योत्सारिणी प्रेरणा** (*Centrifugal Force*) असें म्हणतात. कारण तो दगड फिरत फिरत P येथें आल्यावेळीं, M या मुठींतील गोफिणीचें एक टोंक सोडून दिलें, तर, तो PQ कंसांतून न फिरतां, P येथून फेंकल्याप्रमाणें, PRT या सरळ स्पर्श रेषेनें निघून जाईल. A येथें आल्यावेळीं, तें सोडून दिलें तर, तो AV या स्पर्श रेषेनें निघून जाईल. आणि B येथें आल्यावेळीं सोडून दिलें तर, तो BW या दिशेनें निसटून जाईल. तात्पर्य P दगडाची मूळची प्रेरणा, त्याला सरळ दिशेनें नेण्याचा सर्वदा प्रयत्न करीत असते असें म्हणण्यास हरकत नाहीं.

(७) गोफिणीचीं दोनहीं टोकें, M मुठींत धरून, P दगडाला पूर्वीप्रमाणें फिरविलें तर, तो PR या रेषेनें पुढें न जातां, PQ या वर्तुलखंड मार्गानें जाईल. आमच्या हाताच्या आकर्षणामुळें, P दगड एक दशमांश सेकंदांत, RQ रेषेइतका, मुठीकडे सरकतो अथवा S या मध्यबिंदूकडे, $EQ=PQ'$ इतका ओढला जातो. म्हणून $EQ=PQ'$ या आकर्षणप्रेरणेला, **मध्याभिगामिनी प्रेरणा** (*Centripetal force*) अथवा (*Radial force*) म्हणतात.

(८) वरील वर्णनावरून दिसून येतें कीं, P दगडाला, वर्तुलाकारमार्गानें फिरविण्याला, PR व RQ या दोन प्रेरणा कारणीभूत आहेत. फेकण्यांपासून उत्पन्न होणारी पहिली जी PR प्रेरणा, तिला **सकृत्प्रेरणा** (*Impulse*) असेंही म्हणतात. कारण गति सुरू होण्यासाठीं, प्रारंभीं ती एकवार दिली म्हणजे झालें. दगडाला क्षणोक्षणीं मागून ढकलावें लागत नाहीं. या प्रेरणेमुळेंच तो दगड, परिघाच्या प्रत्येक बिंदूपासून काढलेल्या, **स्पर्शरेषेनें निसटून** जाण्याचा प्रयत्न करीत असतो, म्हणून तिला **स्पर्शरेषीय प्रेरणा** (*Tangential force*) असेंही नांव आहे.

(९) दुसरी जी RQ प्रेरणा, तिला **संततप्रेरणा**–(*Continuous force*) अथवा **आकर्षण** (*acceleration*) असेंही म्हणतात. कारण स्पर्शरेषेनें निसटून जाण्याच्या दगडाच्या प्रयत्नाला निष्फल करून, त्याला वर्तुलमार्गानें फिरण्याला भाग पाडण्यासाठीं, प्रति दशमांश सेकंदाच्या प्रारंभीं, PS दिशेनें, EQ या रेषेएवढा हिसका देणें, आम्हांला जरूर पडतें. दगडानें मोठ्या वर्तुलाच्या बाहेर जाऊं नये म्हणून, आम्हीं आपली मूठ M ही लहान वर्तुलाच्या स्पर्शरेषेंत ताणून धरून, ती गरगरा फिरवीत असतों, त्यावेळीं आमच्या मुठीवर पडणाऱ्या सतत ताणाच्या रूपानें, आम्हांस सतत हिसक्याचा अनुभव येतो.

(१०) गोफिणीच्या दगडास दिलेल्या PR या **सकृत्** (एकदां) प्रेरणेला, भोंवतालच्या वातावरणाचा प्रतिबन्ध, सतत होत असतो. त्यामुळें या **सत्कृत्प्रेरणेचा** वेग, क्षणोक्षणीं कमी होऊं लागतो. तो कमी न व्हावा म्हणून, आम्हांला RPM कोन ९०° पेक्षां लहान करून, आपला मूठ विशेष जोरानें फिरवावी लागते. त्यामुळें PM किंवा RQ दिशेंत, आमच्या मुठीनें उत्पन्न केलेल्या, सतत ताणाचा RE अंश PR दिशेंत सतत घडून,

वातावरणाच्या सतत प्रतिबन्धाचा, सतत प्रतिकार होऊन, दगड समान वेगानें फिरूं लागतो. (पहा ले. २२ आकृ. ४). साधारणपणें हाताच्या फेंकण्यानें, दगडाला जो वेग प्राप्त होतो, त्यापेक्षां जास्त वेग उत्पन्न करण्याचें, गोफण हें एक यंत्र आहे. नुसत्या आरडाओरडीला पांखरें भीतनाशीं झालीं असतील, त्यावेळीं, या यंत्राचें खरें महत्त्व तत्कालीन शेतकरी लोकांच्या लक्षांत येऊन, या यंत्राच्या उत्पादकाचे उपकार सर्वांनीं मनापासून मानिले असतील.

(११) पूर्वोक्त गोफणगुंड्याचा दृष्टांत, सूर्याभोंवतीं फिरणाऱ्या ग्रहांनां पूर्णपणें लागू पडतो. भेद इतकाच कीं, RQ ही **मध्याभिगामिनी संततप्रेरणा** उत्पन्न करायाला आम्हांला जशी गोफण लागते, तशी सूर्याला ती लागत नाहीं. सूर्याला S या ठिकाणीं बसून आम्हांसारखे हातवारे न करितां ग्रहांनां आपल्या भोंवतीं फिरविणारी EQ ही संततप्रेरणा, PS दिशेंत उत्पन्न करितां येते. या त्याच्या सामर्थ्याला **आकर्षणशक्ति** म्हणतात. दुसरा भेद असा कीं, PR ही आडवी **सकृत्प्रेरणा**, प्रारंभीं आम्हांस जशी उत्पन्न करितां येते, तशी ती सूर्याला उत्पन्न करितां येत नाहीं. धूमकेतूरूपी पाषाण, सूर्याच्या गोफणींतून प्रायः निसटून जातात, ते पुनः परत येत नाहींत. कांहीं धूमकेतू मात्र फेंकल्यावर रानटी लोकांच्या **बूमऱ्यांग** अस्त्राप्रमाणें परतही येतात. परंतु असले धूमकेतू फारच कमी. सध्यां सुमारें ते वीस आहेत.

(१२) सूर्याला जर ग्रहांनां आडवे फेकण्याची प्रेरणा उत्पन्न करतां येत नाहीं, तर ती ग्रहांमध्यें प्रथम कशी उत्पन्न झाली असावी, याचें कारण अद्यापि कोणासही समर्पक सांगता येत नाहीं. या प्रश्नाविषयीं अनेक ज्योतिर्विदांच्या अनेक कल्पना आहेत. त्या सर्वांमध्यें **लाप्लास** या ज्योतिर्विदाची कल्पना, विशेष संभवनीय दिसते. ती अशी आहे कीं, कोट्यवधि वर्षांपूर्वीं ही सूर्यसंस्था, (*Solar System*) अत्यंत तप्त वायसारख्या विरलावस्थेंत होती. पुढें त्यांतील उष्णतेमध्यें असमता उत्पन्न होऊन, एक मोठा भूतवारा (प्रवाहानिल *Tourbillon*) उत्पन्न झाला असावा. त्यामुळें सूर्यसंस्था चक्रासारखी चापट होऊन, तिचा विस्तार इंद्रकक्षेच्याही पलीकडे पसरला असावा. पुढें हें महावायुचक्र जसजसें निवत गेलें तसतशी त्यांच्यामध्यें शनीच्या कड्याप्रमाणें, निरनिराळ्या अंतरावर निरनिराळीं कडीं

(वलयें) उत्पन्न झालीं असावीं. पुढें कड्यांच्या उष्णतेमध्यें असमता उत्पन्न झाल्यामुळें तीं तुटून त्यांचे ग्रह उपग्रह बनले असावेत.

सर्व ग्रह सूर्याभोंवतीं एकाच दिशेनें म्हणजे, पश्चिमेकडून पूर्वेकडे फिरतात. सूर्य व ग्रह देखील आपआपल्या अक्षाभोंवतीं, याच दिशेनें फिरत आहेत, या गोष्टीची उपपत्ति, या कल्पनेच्या आधारानें, चांगली बसते. तथापि गुरूचा ८ वा उपग्रह, व शनिचा ९ वा उपग्रह, याच्या विरुद्ध दिशेनें, म्हणजे पूर्वेकडून पश्चिमेकडे फिरतात. पण या गोष्टी अपवादा-दाखल आहेत. त्याचें कांहीं अज्ञात अन्य कारण असावें. हे उपग्रह, विरुद्ध दिशेनें फिरणाऱ्या व पकडलेल्या धूमकेतूच्या द्रव्याच्या घनीभवनापासून बनले असावे, असें आम्हांस वाटतें. एका धूमकेतूनें गुरूभोंवतीं २।३ वेळां प्रदक्षिणा केल्याचें पाहाण्यांत आलें आहे. (ले. ७६ पहा.)

(१३) **गुरुत्वाकर्षण**—ही एक अजब शक्ति आहे. ही पदार्थमात्रांत त्यांच्या त्यांच्या द्रव्यांशाप्रमाणें, म्हणजे परमाणुसंचयाच्या महत्त्वाप्रमाणें, कमी जास्त असते, असें भौतिकशास्त्रवेत्त्यांनीं मानिलें आहे. हिची क्रिया कशी चालते हें प्रत्यक्ष दिसत नाहीं. तथापि हिच्यामुळें होणाऱ्या कार्यावरून हिचें अस्तित्व दिसून येतें. **लोहचुंबकीय आकर्षण-रसायनाकर्षण** इत्यादि आकर्षणाच्या इतर जाती आहेत. शेवटील दोन प्रकारचीं आकर्षणें, विशिष्ट पदार्थद्वयामध्येंच प्रकट होतात. पण गुरुत्वाकर्षणाची गोष्ट तशी नाहीं. जल, तृण, मृत्तिका, पाषाण, धातु, इत्यादि पदार्थांच्या शेकडों जाती आहेत. तथापि या सर्वांमध्यें ही शक्ति भरली आहे. उदाहरणार्थ—उंच-स्थानांवरून पूर्वोक्त कोणताही पदार्थ सोडून दिला तर, तो आपला तडक पृथ्वीकडे येऊं लागतो. **दुसरें उदाहरण**—एका जाड पंचपात्रींत अथवा ताम्हणांत पाणी घालून, त्यांत एक बारीक व लहान गवताची काडी, पात्राच्या मध्यबिंदूपासून थोडी एकीकडे, त्रिज्येच्या दिशेंत ठेवावी. नंतर ती कांहीं वेळानें जिकडे कांठ जवळ असेल तिकडे ती हळूं हळूं सरकूं लागते. आणि कांठ जसा जसा जवळ येऊं लागतो, तसा तसा तिचा वेग वाढूं लागतो. आणि शेवटीं चिमुकल्या बाणाप्रमाणें, तिचें टोक भांड्याच्या आंतल्या बाजूवर आदळतें. हा प्रयोग फारच सोपा आहे. काडी पाण्यावर तरंगत असतांनां तिचें वजन पाण्यावर सावरलें जातें व जवळच्या कांठाचें आकर्षण दूरच्या कांठापेक्षां जास्त असल्यामुळें ती काडी कांठ जिकडे जवळ

असेल तिकडची वाट धरते व त्यावेळीं तिचा वेग क्षणोक्षणीं वाढत आहे ही गोष्ट स्पष्टपणें दृष्टीस पडते. त्याबद्दल संशय राहात नाहीं. म्हणून **आकर्षण** म्हणजे, क्षणोक्षणीं बसणारे हिसके, वेग म्हणजे हिसक्यांची बेरीज. आणि अशा लहान लहान वेगांची जी बेरीज, तोच गमनमार्ग किंवा पतनमार्ग असें म्हणतां येईल. (लेख २४ पहा.)

(१४) **आकर्षण** हें हिसक्यांच्या स्वरूपाचें असतें. ही गोष्ट, खंड्या (*King fisher*) नांवाचा जलविहारी पक्षी, हवेंत तरंगत असतांना, स्पष्टपणें दिसून येते. हें पाखरूं, चिमणीपेक्षां थोडें मोठें असून त्याच्या अंगावर काळे व पांढरे पट्टे असतात. बगळ्याप्रमाणें पाण्यांत उभा राहून, हा पक्षी आपली शिकार धरीत नाहीं, तर पाण्याच्या सपाटीपासून १५।२० फूट उंचीवर हवेंत स्थिर राहून, तो आपल्या शिकारीची टेहेळणी करीत असतो. आणि एकादा मासा आटोक्यांत येतांच, त्याजवर झडप घालून त्याला वर आणतो. पाण्यावर तो तरंगत असतेवेळीं त्याच्याकडे पाहिलें तर, मोठी मौज दिसते. तो आपल्या पंखांनीं हवेवर एकसारखे तडाखे मारीत असतो. परंतु, त्याचें डोकें बिलकूल हालत नाहीं. त्याचे पंख झपाट्यानें हालत असतां, त्याचें डोकें कसें स्थिर राहूं शकतें, या चमत्काराचें इंगित, असें आहे कीं, पंखाच्या एका फटकाऱ्याच्या काळांत पृथ्वीच्या आकर्षणरूपी हिसक्यामुळें, तो जितका खालीं आला असता, तितकेंच आपल्याला वर उसळतां येईल, अशा बेतानें, तो आपल्या पंखाचे तडाखे हवेवर सतत मारीत राहतो. यामुळें आकर्षण ($-a$) व उत्सारण ($-a$) यांचें क्षणोक्षणीं साम्य होत गेल्यानें, वेग शून्य होऊन त्याला हवेंत स्थिर राहतां येतें. जर $a=$ आकर्षणाच्या हिसक्याची एका क्षणांतील लांबी, $t=$ क्षणांची संख्या, आणि $v=$ वेगाची लांबी, असें मानिलें तर $v=at$ ही इष्टक्षणसंख्येंतील, वेगाची लांबी होते. खंड्या पक्षी आपलें भक्ष्य टेहेळीत असतां

$$v=(a-a)\ t=o$$

असें प्रतिक्षणीं होत असतें.

(१५) **द्रव्य आणि त्याचे धर्म**—द्रव्य हें कसें उत्पन्न जाहलें असावें, याची कल्पना करितां येत नाहीं. पृथ्वी, आप्, तेज, वायू, म्हणजे—घन, प्रवाही, चिद्रूप व वायुरूप या द्रव्याच्या चार अवस्था आहेत.

द्रव्य म्हणजे सोनें व रुपें इतकेंच नव्हे, तर आमच्या दृष्टीस पडणारे किंवा भासणारे पदार्थ, ज्याचे बनले आहेत तें. असंख्य परमाणु मिळून द्रव्य बनलें असतें. प्रत्येक परमाणूंत **प्रेरकत्व** व **प्रेरणाशरणत्व** हे दोन गुण वास करितात. म्हणजे प्रत्येक परमाणु, तदितर सर्व परमाणूंना, आपल्याकडे ओढीत असतो, व त्यांजकडून तद्विरुद्ध दिशेनें ओढिला जात असतो. इतर परमाणूंच्या ओढण्याला, त्याच्यानें प्रतिबंध करवत नाहीं. या गुणालाच **प्रेरणाशरणत्व** म्हणायचें. झोपाळ्यावर कितीही माणसें बसलीं असलीं, तरी तो जर स्थिर आहे तर एकादें मूलही त्याचें स्थैर्य नष्ट करूं शकतें. याच धर्मामुळें, जसा सूर्य ग्रहांस ओढीत असतो, तसे ग्रहही सूर्यास आपापल्याकडे यथाशक्ति ओढीत असतात. परंतु सूर्याचें द्रव्य ग्रहाच्या द्रव्यापेक्षां हजारोंपट ज्यास्त आहे. (ले. ३८ पहा.) म्हणून त्याच्या आकर्षणापुढें ग्रहांचें आकर्षण उपेक्षणीय होतें. यास्तव गोलद्वयप्रश्नविमर्शांत सूर्याला स्थिर मानण्यांत मोठीशी चूक होत नाहीं.

या गोलद्वय-प्रश्नविमर्शांत आकर्षक व आकृष्यमाण असे दोनच गोल या विश्वामध्यें आहेत असें कल्पिलें आहे. त्यापैकीं आकर्षक गोल सूर्यासारखा विशाल व स्थिर आहे, व आकृष्यमाण गोल ग्रहासारखा अत्यंत क्षुल्लक कण आहे असें मानिलें आहे.

प्रकरण ३ रें.

प्रेरणाविमर्श.

(१६) प्रेरणा म्हणजे ओढणें असें समजावें. प्रेरणेमुळें पदार्थाला गती प्राप्त होते. पदार्थाला पुढून एक हिसका, किंवा मागून एक टोला दिला म्हणजे तो सरळ रेषेंत चालूं लागतो आणि त्याच्या गतीला प्रतिबंध, न होईल तर, त्याच्या **प्रेरणाशरणत्व**धर्मामुळें, तो तसाच निरंतर त्याच टोल्याच्या सरळ रेषेंत चिरकाल जात राहिला पाहिजे. परंतु या म्हणण्याची प्रतीति पहाण्यासाठीं, आपण जर एक दगड आकाशांत फेकला, तर या

म्हणण्याच्या अगदीं विरूद्ध अनुभव येतो. म्हणजे तो एकसारखा सरळरेषेंत पुढें जात नाहीं, त्याचा मार्ग वक्र होत होत थोड्याच कालांत, तो जमिनीवर आदळतो. त्याच्या या विरुद्ध आचरणाचीं मुख्य दोन कारणें आहेत व तीं पृथ्वीवर अपरिहार्य आहेत. पहिलें कारण वातावरणापासून होणारा सतत प्रतिबंध, आणि दुसरें कारण पृथ्वीचें **संतताकर्षण.** हीं दोन कारणें[1] नसतीं तर वर म्हटल्याप्रमाणें तो दगड ले. २९ आकृति ६ येथें दाखविल्याप्रमाणें, AG रेषेंत समानवेगानें गमन करून, नक्षत्रमंडळाच्याही पलीकडे गेला असता. तथापि हीं दोन्ही कारणें जितक्या प्रमाणानें कमी करावीं, त्या मानानें गतीची सरलता आणि नैरंतर्य, हे धर्म वाढलेले दिसून येतात. **बिलियर्ड** खेळांत टेबल क्षितिजसमांतर असतें. त्यामुळें चेंडूवरील पृथ्वीच्या आकर्षणाचे हिसके, ले. १४ यांत दाखविल्याप्रमाणें निष्फल होतात. त्यामुळें गमन मार्गाचें, ऊर्ध्वाधरादिशेंत वक्र होण्याचें कारण नाहींसें होतें आणि चेंडूच्या गोलाकारामुळें व हलकेपणामुळें त्याची गति पुष्कळ कालपर्यंत टिकते. तथापि वायूचा प्रतिबंध व टेबलाच्या पृष्ठभागांशीं घर्षण हीं दोन कारणें शिल्लक राहतातच. म्हणून एका टोल्यासरसें सरळ व समांतर गतीनें **चिरकाल** जात राहणें हा जो गतीचा पहिला नियम त्याचा पूर्ण अनुभव येणें, पूर्वोक्त कारणास्तव अशक्य आहे. तो बुद्धीनेंच अनुभविला पाहिजे.

आपण जंगी भोंवरा फिरवितांना त्याच्या दांड्याभोंवतीं बारीक व सफाईदार दोरी गुंडाळून, त्याला स्पर्शरेषेच्या दिशेनें असा एक जोराचा हिसका देतों कीं, तो मोठ्या वेगानें सूं असा आवाज करीत फिरूं लागतो. नंतर जमीन जितकी टणक व गुळगुळीत असेल, त्या मानानें तो जास्त वेळपर्यंत फिरत राहतो,ही अनुभवसिद्ध गोष्ट आहे. आमची पृथ्वी हा एक जंगी भोंवराच आहे. भेद इतकाच कीं, जमिनीच्या व सभोंवतालच्या वायूच्या घर्षणामुळें, भोंवऱ्याचें अक्षभ्रमण थोडक्याच वेळांत कुंठित होतें. पण अंतरिक्षांत या दोन्ही गोष्टींचा अभाव असल्यामुळें, पृथ्वी कोट्यावधि वर्षें सतत फिरत आहे व पुढेंही अशीच फिरत राहील. पृथ्वीचें अक्षभ्रमण हें प्रेरणाशरणत्वाचें एक ढळढळीत उदाहरण आहे.

---

१ सूर्यासमोर आरसा धरला असतां उत्पन्न होणाऱ्या कवडाशावर या दोन्ही कारणांचा परिणाम होऊं शकत नाहीं. म्हणून कवडासा मात्र नक्षत्रमंडळाच्याही पलीकडे ताठ सरळ रेषेंत जाऊं शकतो.

(१७) परंतु भूभ्रमराभोंवतीं दोरखंड गुंडाळून, पूर्वी कोणीतरी त्याला फिरविलें असेल, ही कल्पना मात्र संभवत नाहीं. लाप्लासच्या पूर्वोक्त कल्पनेपासून, अक्षभ्रमणाची थोडी उपपत्ति लागते. (ले. १२). पण तिच्यापासून पूर्ण समाधान होत नाहीं. आमच्या मतें पुढें सांगितल्याप्रमाणें अक्षभ्रमणाची उपपत्ति लावितां येते. आपणांस विटीदांडूचा खेळ माहीत आहेचं. दांडूचा टोला (*Impact*) विटीच्या गुरुत्वमध्यावर बसला तर, विटी आपल्या मध्याभोंवतीं न फिरतां नीट सरळरेषेंत मोठ्या वेगानें जाते. मध्यबिंदूपासून थोडा एकीकडे टोला बसला तर, विटी आपल्या भोंवतीं फिरत, सरळरेषेनें पुढें जाऊं लागते. अशा समयीं, तिचा पुढें जाण्याचा वेग थोडा कमी असतो. याहीपेक्षां मध्यापासून जास्त दूर टोला बसेल तर, विटी पूर्वींपेक्षां जास्त वेगानें आपल्या भोंवती फिरते. पण पूर्वींपेक्षां कमी वेगानें पुढें जाते. म्हणजे दूर खेपेस टोल्याचा जोर[१] व वेग म्हणजे धक्का, समान असतांना, विटीचें अक्षभ्रमण टोल्याच्या मध्यांतराच्या, म्हणजे भुजज्येच्या प्रमाणांत बदलतें, व पुरःसरण कोटिज्येच्या प्रमाणांत बदलतें. अक्षभ्रमण वाढविण्याकडे टोल्याचा भाग जास्त खर्ची पडेल तर, त्यामुळें पुरःसरण मंदावलें पाहिजे, ही गोष्ट यन्त्रशास्त्र (*Mechanics*) रीत्या सिद्ध करितां येते.[२]हा अक्षभ्रमण (*Rotation*)व पुरोगमन* (*Revolution*) यांचा परस्पर संबंध ग्रहाच्या संबंधानें बराच प्रत्ययास येतो. ग्रह सूर्यापासून जसजसे दूर आहेत, तसतशी त्यांची सरळरेखीय गती, व अक्षभ्रमण, जलद होत गेलें आहे. आतां हा नियम केप्लरच्या तिसऱ्या नियमाइतका तंतोतंत जुळत नाहीं. त्याचीं दुसरीं अनेक कारणें असावीं. ग्रहाच्या द्रव्याची घनता, त्याचें आकारमान, व त्यांचे भोंवतीं फिरणारे उपग्रह, या गोष्टींचाही या कामांत संबंध येतो. अक्षभ्रमण उत्पन्न करण्यासाठीं, विटीला जसा टोला द्यावा लागतो, तसा ग्रहाला साक्षात् टोला देण्याची जरूरी नाहीं. टोल्याचें कार्य अडथळ्यापासूनही होतें. मनुष्य चालतांना त्याला ठेंच लागली तर तो पुढें तोंडघशीं पडतो. तोंडघशीं पडणें हें अंशतः अक्षभ्रमणाचेंच स्वरूप

१. जोर म्हणजे हतोड्याचें वजन किंवा द्रव्य (Mass). द्रव्य व वेग यांच्या गुणाकाराला धक्का (Momentum) म्हणतात.

२. क्षणिकगति (virtual velocity) हें प्रकरण पहा.

* किंवा कक्षाभ्रमण.

आहे. कारण हा अडथळा त्याच्या बेंबीपासून (गुरुत्वमध्यापासून) बऱ्याच अंतरावर पावलापाशीं झाला असतो. (येथें **अक्षभ्रमण** हा नवीन विषय घालणें)*

(१८) **प्रेरणेचें प्रदर्शन**—प्रेरणा अदृश्य असते.[१] तथापि तिचीं दोन कारणें व्यक्त असतात. पहिलें दिशा, आणि दुसरें गमन. पदार्थाला टोला किंवा हिसका बसतांच तो कोणत्या तरी एका नियत दिशेनें व वेगानें चालूं लागतो. हीं दोन्हीं कार्यें रेषेनें दाखवितां येतात. स्थिर पदार्थ, दिग्दर्शक वर्तुळाच्या मध्यबिंदूवर आहे असें मानिलें तर, तो चालूं लागतांच उत्पन्न होणाऱ्या सरळ रेषेवरून, त्याच्या गतीची दिशा कळते, व एका सेकंदांत किंवा कालाच्या अन्य कोणत्याही भागांत भरणाऱ्या, त्याच्या गतीच्या लांबीवरून, तिचें महत्त्व किंवा वेग दिसून येतो. म्हणून प्रेरणेचें प्रदर्शन, सरळरेषेनेंच करणें शक्य व योग्य आहे.

(१९) **प्रेरणांचें एकीकरण**–प्रत्येक पदार्थ प्रेरणाशरण आहे, असें मागें (ले. १५) यांत सांगितलें आहे. प्रेरणा दाखवील त्या दिशेनें त्यानें तत्क्षणीं निघालें पाहिजे, असा विश्वनियंत्याचा वट्टहुकूम आहे. जेव्हां एकच प्रेरणा घडते तेव्हां तिचा हुकूम पाळणें कठिण नाहीं. पण एका पदार्थावर, एकाच क्षणीं, भिन्न दिशेच्या व भिन्न वेगाच्या जेव्हां दोन प्रेरणा घडतात, तेव्हां तो पदार्थ कोणत्या वेगानें व कोणत्या दिशेनें चालूं लागेल असा प्रश्न उद्भवतो. दोन प्रेरणांच्या दिशा एकच असतील तर, तो पदार्थ त्या एकाच दिशेनें व त्या दोन प्रेरणांच्या वेगांच्या बेरजेइतक्या वेगानें, चालूं लागेल हें

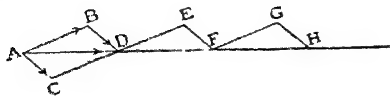
---

* वडिलांनीं येवढेंच लिहून ठेविलें आहे. अक्षभ्रमण हा विषय घालणें त्यांना झालें नाहीं.

१ सूर्यसिद्धांतांत प्रेरणेला वातरश्मि असें म्हटलें आहे. उच्चस्थ देवतांचें तोंड सूर्याकडे असतें. ग्रह जर डावीकडे असेल तर डाव्या हातांतील दोरीनें, उजवीकडे असेल तर उजव्या हातांतील दोरीनें, त्या देवता ग्रहाला ओढीत असतात. ग्रह नीचापुढें ६ राशींच्या आंत असतांना, त्याचें मंदफळ धन कां असतें आणि उच्चापुढें असतांना तेंच ऋण कां होतें या गोष्टीची भाविक लोकांसाठीं ही उपपत्ति दिली आहे. अर्वाचीन शोधाप्रमाणें ग्रहकक्षा दीर्घ वर्तुलाकार असून, त्यांच्या एका फोकसांत सूर्य असतो व ग्रहांनां सारख्या कालांत सारखीं क्षेत्रें चालावीं लागतात. व त्यामुळें ते पुढें जातात व रेंगाळतात असें दिसतें.

उघड आहे. ही गोष्ट शेतांतील नांगर ओढतांना जेव्हां अनेक बैलांच्या जोड्या जोडतात, तेव्हां प्रत्ययास येते. परंतु जेव्हां दोन प्रेरणांच्या दिशा व वेग भिन्न असतात तेव्हां त्या दोन दिशांच्या मधूनच त्या पदार्थानें गेलें पाहिजे व मोठ्या वेगाच्या दिशेकडे जास्त वळला किंवा झुकला पाहिजे. ही गोष्ट रथ ओढतांना दोन दोरखंडें ओढणाऱ्यांची संख्या, जेव्हां असमान असते, तेव्हां प्रत्ययास येते. पण अशा प्रसंगीं, त्या दोन वेगांचें एकीकरण इतकेंच होईल असें सांगणें कठिण आहे. या प्रश्नाचा निकाल प्रेरणासमदिक्चतुरस्र नांवाच्या पुढील सिद्धांतावरून करतां येतो.

(२०) प्रेरणासमदिक्चतुरस्र— आकृ. २ पहा. तेथें A या पदार्थावर AB व AC या दोन भिन्न दिशेच्या व भिन्न वेगाच्या प्रेरणा, एकाच क्षणीं, घडल्या आहेत असें समजूं या. या दोन प्रेरणा म्हणजे दोन हुकूम. त्या पदार्थानें अक्षरशः अवश्य पाळिले पाहिजेत. म्हणून



(आकृति २)

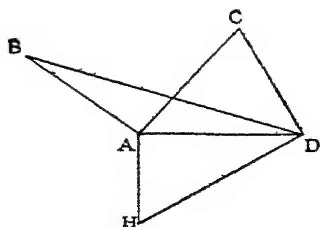
त्यानें एका सेकंदाच्या शेवटीं B येथें येऊन तत्क्षणीं AC रेखेशीं समान व समांतर अशा BD दिशेनें, D येथें आलें पाहिजे. अथवा पहिल्यानें एका सेकंदाच्या शेवटीं C येथें येऊन तत्क्षणीं AB रेखेशीं समान व समांतर, अशा CD रेषेनें, D येथें आलें पाहिजे. सारांश, जरी एकाच कालीं एका पदार्थानें दोन दिशेनें जाणें अशक्य आहे, तथापि, A पदार्थ एका सेकंदाच्या शेवटीं D येथें आल्यानें त्याचा परिणाम दोन्ही प्रेरणारूपी आज्ञा पाळिल्यासारखा होतो. आणि या आज्ञा प्रतिक्षणीं पाळावयाच्या असतील तर A नें AD या कर्णरेषेनेंच गेलें पाहिजे. म्हणून एका पदार्थावर, एकाच काळीं, दोन भिन्न दिशेच्या व भिन्न वेगाच्या प्रेरणा घडतील तर, तो पदार्थ त्या प्रेरणादर्शक रेषांवर काढलेल्या, समांतरभुज चौकोनाच्या समदिक्चतुरस्राच्या कर्णरेषेनें गमन करील, हें सिद्ध. ही सिद्धता प्रयोगावरून अनुभवास तंतोतंत जुळते.

A पहिल्या सेकंदाच्या शेवटीं, D येथें आल्यावर, प्रेरणा अविनाशी असल्यामुळें, दुसऱ्या सेकंदाच्या शेवटीं तो AD या नव्या दिशेनें व वेगानें, तो F येथें जाईल. तिसऱ्या सेकंदाच्या शेवटीं तो H येथें जाईल. याप्रमाणें पढेंही निरंतर जात राहील.

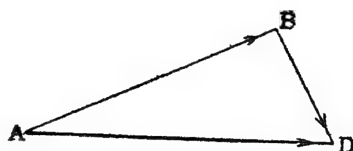
(२१) **प्रेरणात्र्यस्र**— प्रेरणासमांतरभुज–चतुष्कोनाच्या सिद्धते-पासून प्रेरणात्रिकोण सिद्ध होतो. वरील दुसऱ्या आकृतींत, AB रेषेच्या B टोकापासून AC ला समान व समांतर, अशी BD रेषा काढून, AD बिंदू सांधिले तर उत्पन्न होणाऱ्या ABD त्रिकोणाला, प्रेरणात्रिकोण म्हणतात. अशा त्रिकोणाची तिसरी बाजू, त्या मूळ दोन प्रेरणांपासून उत्पन्न होणारी नवीन तिसरी प्रेरणा दर्शविते. हिला **एकीकृत** किंवा **फलित** (*Resultant*) **प्रेरणा** म्हणतात. प्रेरणात्रिकोणांत दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूएवढी असते असें भूमितीच्या सिद्धांताविरुद्ध म्हणतां येईल. याला **प्रेरणानियम** (*Vector Law*) म्हणतात.

प्रेरणात्रिकोणांत एकीकृतप्रेरणेची दिशा मूळ प्रेरणांच्या दिशांच्या क्रमाविरुद्ध असते. मूळ प्रेरणा AB, BD या दिशेच्या असतील तर, एकीकृत प्रेरणेची दिशा वरील क्रमाप्रमाणें, DA अशी जाहली पाहिजे. पण ती तशी नसून तद्विरुद्ध म्हणजे AD दिशेची आहे, हें लक्ष्यांत ठेविलें पाहिजे. त्रिकोणाच्या तीन बाजूंनीं दर्शविलेल्या तीन प्रेरणा, AB, BD, AD, या क्रमिक दिशांनीं, एकाच क्षणीं पदार्थावर घडतील तर, तो पदार्थ तीन प्रेरणांची एकीकृत प्रेरणा शून्य झाल्यामुळें, स्थिर राहील.

(२२) **प्रेरणेचें पृथक्करणः**—(आकृ. ३) जर प्रेरणा–त्रिकोणांतील तिसरी बाजू, पहिल्या दोन बाजूंनीं दर्शविल्या जाणाऱ्या दोन प्रेरणांची फलित प्रेरणा दर्शविते, तर त्या दोन प्रेरणा फलित प्रेरणेच्या **पृथक्कृत** किंवा **घटकप्रेरणा** आहेत, असें म्हणण्यास हरकत नाहीं. या दृष्टीनें विचार केला तर, एकाच पायावर काढलेल्या अनेक त्रिकोणाच्या बाजू-



(आकृ. ३)



(आकृ. ४)

त्या पायानें दर्शविल्या जाणाऱ्या मूळ प्रेरणेच्या, त्या त्या दिशेच्या, घटक-प्रेरणा असतात. जसे AB, BD; AC, CD; AH, HD; या सर्व AD या मूळ प्रेरणेच्या घटक प्रेरणा आहेत.

पृथक्कृतप्रेरणांचा गणितांत उपयोग करितां यावा म्हणून, त्या परस्परांस लंब दिशेस काढितात. (आ. ४ पहा). येथें AD या मूलप्रेरणेचा, AB दिशेंत केवढा परिणाम होतो हें काढण्यासाठीं, AB रेषेवर DB लंब रेषा काढिली आहे. आतां प्रेरणा त्रिकोणाप्रमाणें AB, BD, या AD च्या पृथत्कृतप्रेरणा आहेत. आतां AD ची लांबी माहीत असेल तर, AB, BD, यांच्या लांब्याही ठरवितां येतात. कारण ABD कोन काटकोन आहे. म्हणून त्रिकोण मितीप्रमाणें—

$$AB = AD \cos \angle DAB,$$

व $$BD = AD \sin \angle DAB,$$

असें सिद्ध होतें. म्हणून कोणत्याही दिशेंत घडणाऱ्या, मूल प्रेरणेचा परिणाम, त्या दिशेशीं इष्ट कोन करणाऱ्या इतर दिशेंत, केवढा घडतो, हें गणितानें काढायचें असेल तर, त्या इष्ट कोनाच्या कोटिज्येनें, त्या मूल प्रेरणेला गुणिलें, म्हणजे झालें. अशा कोटिज्यांना **दिक्कोटिज्या** (*direction Cosines*) म्हणतात. आकर्षणशास्त्रीय गणितांत यांचाच उपयोग करावा लागतो. समजा कीं A धूमकेतू BA दिशेंत कांहीं वेगानें सूर्याकडे चालला आहे व त्याच्या मागून, त्याला एक ग्रह, AD या विरुद्ध दिशेनें, AD येवढ्या जोरानें ओढीत आहे. तर ग्रहाच्या आकर्षणामुळें, त्या धूमकेतूचा वेग, AB इतकाच कमी होईल. AD इतका कमी होणार नाहीं. BD प्रेरणा, AB वर लंब असल्यामुळें, AB दिशेंत, तिचा परिणाम मुळींच घडत नाहीं.

प्रकरण ४ थें.

पृथ्वीचें आकर्षण.

(२३) भूपृष्ठाजवळील पदार्थ, निराधारावस्थेंत ज्या प्रेरणेमुळें खालीं पडतात, तिला **गुरुत्वाकर्षण** (*Gravity*) म्हणतात. हें पृथ्वीचें आकर्षण (g) या चिन्हानें दाखविलें जातें.

विद्वानांनीं फार जपून केलेल्या प्रयोगांवरून असें निश्चित झालें आहे कीं, एकाद्या उंच मनोऱ्यावरून, दगड किंवा शिशाचा गोळा, सोडून दिला तर, तो क्षितिजपातळीशीं लंब असणाऱ्या रेषेंत म्हणजे ओळंब्याच्या दिशेंत खालीं येतो. निघालेल्या स्थानांपासून पहिल्या सेकंदाच्या शेवटीं

तो १६ फूट खालीं उतरतो. दुसऱ्या सेकंदाच्या शेवटीं ६४ फूट, तिसऱ्या सेकंदाच्या शेवटीं १४४ फूट, चौथ्या सेकंदाच्या शेवटीं २५६ फूट, या प्रमाणें खालीं उतरत असतो. यावरून भूपृष्ठाजवळ पदार्थाच्या अधःपतनाची लांबी पतनाच्या कालाच्या वर्गाच्या सरळ प्रमाणांत असते. हा **प्रयोगसिद्ध** नियम झाला.

(२४) आतां १६ फूट लांबीचा एक मानदंड[1]-(*Unit of length*) मानिला तर, लंब दिशेंत पडणाऱ्या पदार्थाच्या मार्गाची लांबी, पहिल्या दुसऱ्या, तिसऱ्या, चौथ्या, इत्यादि सेकंदाच्या अंतीं, अनुक्रमें, १, ४, ९, १६, २५, इत्यादि दंड भरते असें झालें. यांचीं अंतरें, ३, ५, ७, ९ इत्यादि दंड, त्या त्या सेकंदाच्या अवधींमधील पतनाच्या वेगांचीं मानें आहेत. पुन्हां या वेगांचीं अंतरें, २, २, २, २ इत्यादि दंड, त्या त्या सेकंदांत होणारी, वेगाची वृद्धि दाखवितात. वेगाच्या वृद्धीलाच, **आकर्षण** म्हणतात. पुन्हां यांचीं अंतरें ०, ०, ० यांना **पराकर्षण** (*Super acceleration*) असें म्हणतात. यावरून भूमध्यापासून समान अंतरावर, गुरुत्वाकर्षण अविकृत असतें, असें सिद्ध होतें.[2] हीच गोष्ट आम्ही खंड्या पक्षाच्या पाण्यावर तरंगण्याच्या निरीक्षणापासून, प्रकारांतरानें लेख १४ यांत सिद्ध केली आहे.

वरील मजकूर खालील प्रस्तारावरून चांगला ध्यानांत येईल.

अधःपतनाचा—

काल. (t) सेकंद.	लांबी. (s) दंड	वेग. (v) दंड	आकर्षण (g) दंड	पराकर्षण. (u) दंड
०	०			
		१		
१	१		२	
		३		०
२	४		२	
		५		०
३	९		२	
		७		०
४	१६		२	
		९		
५	२५			

१, असले ३३० दंड = १ मैल; १३२०००० दंड = भूत्रिज्या.

२, कारण या प्रयोगांतील अधःपतनाची लांबी भूत्रिज्येपुढें उपेक्षणीय आहे. लेख ४७ यांतील समीकरण पहा.

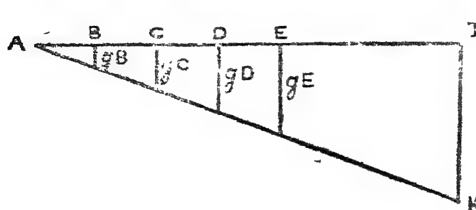
वरील प्रस्तारांवरून दिसून येतें कीं, पडणाऱ्या पदार्थांचा वेग, कालाच्या प्रमाणांत एकसारखा वाढत असतो. परंतु वेगाचा वेग म्हणजे **आकर्षण** (g) हें मात्र २ दंड किंवा ३२ फूट हें स्थिर, म्हणजे अविकृत असतें. निदान भूपृष्ठासमीप तरी, तें अचल किंवा अविकारी असतें, असें म्हणतां येईल.

परंतु हें गुरुत्वाकर्षण वस्तुतः अचल नाहीं. पृथ्वीपासून जसजसें दूर जावें तसतसें **तें अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त पटीनें कमी होत जातें**, हीच एक मुख्य गोष्ट आपणांस या पुस्तकांत सिद्ध करावयाची आहे, व तिच्यासाठींच पुढील सर्व खटपट आहे, हें वाचकांनीं ध्यानांत ठेवावें. (पहा लेख ६५)

(२५) परंतु प्रत्येक सेकंदाच्या प्रारंभींच, दोन दंड आकर्षणाचा हिसका बसतो, असें जें वरील प्रस्तारावरून अनुमान निघतें, तें बरेंच स्थूल आहे. तें सूक्ष्म असतें तर, कोणत्याही सेकंदाच्या मध्यस्थानचें पतन, त्रैराशिकानें काढिलेल्या पतनाशीं जुळलें असतें. परंतु तें जुळत नाहीं.

उदाहरण—चार सेकंदांत चाललेली वाट १६ दंड, आणि पुढील अर्ध्या सेकंदांत चाललेली वाट त्रैराशिकाप्रमाणें ४·५० दंड मिळून २०·५० दंड, ४½ सेकंदांत, पतन झालें पाहिजे. परंतु पतनाच्या नियमाप्रमाणें ४·५ सेकंदाचा वर्ग २०·२५ दंड इतकेंच भरतें. म्हणून आकर्षणाचे हिसके दर सेकंदाच्या प्रारंभींच बसतात, असें न मानतां, सेकंदाच्या अवधींत आकर्षणाचें असंख्य, पण कोमल व समान, हिसके बसत असतात, असें मानिलें पाहिजे. अशा प्रकारच्या पृथ्वीच्या सतताकर्षणाला, **गुरुत्वाकर्षण** (*Gravitation*) म्हणतात. पदार्थावरील आकर्षण, त्याच्या वजनावरून अनुभवास येतें म्हणून त्याला **गुरुत्वाकर्षण** हें नांव दिलें आहे.

(२६) अशा प्रकारच्या आकर्षणापासून उत्पन्न होणाऱ्या, एका सरळ रेषेंतील पतनाचें गणित करण्याचा जो नियम, लेख २३ यांत प्रयोगावरून सिद्ध केला आहे, तो भूमिती, बीज व परमाणु, या तीन रीतींनीं सिद्ध करतां येतो. (आकृ. १० पहा.).



(आकृ. १०)

येथें At ही इष्टकालावधिदर्शक, क्षितिजसमांतर रेषा आहे. AB, BC, CD, इत्यादि. तिचे, असंख्य पण समान भाग आहेत. व तेथून काढलेल्या gB, gC, gD इत्यादि, असंख्य रेषा At रेषेवर लंब आहेत.

$AB=B$; $AC=C$; $AD=D$; $At=t$; इत्यादि At रेषेचे असंख्य, व समानांतरित भाग कल्पिले, व g हें, एका अत्यल्प कालविभागांत बसणाऱ्या हिसक्याचें माप मानिलें तर, $gB, gC, gD, \ldots\ldots gt$ या असंख्य लंब रेषा, त्या त्या क्षणाचे वेग दर्शवितात, आणि $gB\times AB$; $gC\times BC$; $gD\times CD$; ...... $gt\times Et$; या पट्या अत्यंत अरुंद (रेषाकार) व असंख्य होतात. या असंख्य पट्यांची बेरीज तेंच पतनाचें मान असलें पाहिजे, असें मागील प्रस्तारावरून ठरतें.

आतां या लंबरेषा, आपापल्या पायाच्या प्रमाणांत आहेत. म्हणून त्यांचीं टोकें AK या सरळरेषेंत असलीं पाहिजेत. अर्थात् AKt हा एक काटकोन त्रिकोण आहे. आणि पूर्वोक्त वेग दर्शक असंख्य व अत्यंत अरुंद पट्ट्या, एकमेकीस जोडून, या त्रिकोणाचें क्षेत्रफल बनलें आहे. म्हणून या त्रिकोणाचें जें क्षेत्रफल, तत्तुल्य सर्व वेगांची बेरीज, म्हणजे पतन असलें पाहिजे.

AKt त्रिकोणाचें क्षेत्रफल $=S$, पाया $=t$; आणि लंब $=gt$ असें मानिलें तर,

त्रिकोनाचें क्षेत्रफल = पाया × लंबार्ध, असते.

म्हणून पतन $S = t \times \frac{1}{2} gt$;

(१) ... $S = \frac{1}{2} gt^2$ (**भूमिति पद्धति**)

बीज पद्धति—क्रमानें वाढत जाणाऱ्या वेगांची बेरीज, गणित श्रेढीच्या पद्धतीनेंही, करितां येतें. जसें—(येथें गच्छ म्हणजे श्रेढींतील पदांची संख्या)

सर्वधन = $S = \frac{1}{2}$ (आदिपद + अन्त्यपद) × गच्छ;

$S = \frac{1}{2} (0 + gt) t$

(२) $\therefore S = \frac{1}{2} gt^2$ (**बीज पद्धति**)

परमाणुगणितपद्धति—सरळ गमनाच्या प्रथम परमाणूंनां वेग (v)

म्हणतात. आणि परमाणूंच्या परमाणूंनां, आकर्षण (g) म्हणतात. म्हणून क्रमिक **पिंडीकरणरीतीनें**--

$$\text{पराकर्षण} = \frac{d^3 S}{d t^3} = 0; \quad \text{म्हणून आकर्षण } \frac{d^2 S}{dt^2} = g$$

$$\text{वेग } (v) = \frac{ds}{dt} = gt + C; \qquad C = \text{मूळचा वेग.}$$

(३) **परमाणुगणितपद्धतीनें** पतन—

$$S = \tfrac{1}{2} gt^2 + Ct + C'; \qquad C' = \text{मूळचें पतन.}$$

टीपः-- C आणि C' हे, पतनप्रारंभ होण्यापूर्वीचे वेग आणि पतन आहेत. यांची किंमत ० पासून पाहिजे तेवढी मानता येतें. ० मानिली तर g, gt, $\frac{1}{2}gt^2$ अशी आकर्षण, वेग, व पतन यांचीं मानें होतात.

(**२७**) वर सिद्ध केलेल्या $S = gt^2/2$ म्हणजे $S = \frac{1}{2} gt^2$ या **समीकरणांपासून, पुढील प्रकरणांत उपयोगीं पडणारीं खालील समीकरणें** सहज उत्पन्न करितां येतात. जसें समीकरण (१) यांतील पदांच्या स्थलांतरापासून—

अधःपतन $= S = \frac{1}{2} gt^2$ ... ... (१)

म्हणून $gt^2 = 2S$ ... ... (२)

आकर्षण $g = 2S/t^2$ ... ... (३)

समीकरण (३) च्या दोन्ही बाजूंस gt^2 नें गुणिलें तर

वेगवर्ग $g^2t^2 = 2\, gS = v^2$ ... ... (४)

वेग $v = \sqrt{2gS}$ ... ... (५)

उदाहरण— हातांत वॉच घेऊन **कारवार** जिल्ह्यांतील **गेरसप्पा** धबधब्यावरून, एक धोंडा सोडून दिला तर, खालच्या डोहांत पडण्यास त्याला साडेसात सेकंद लागले, तर धबधब्याची खोली किती फूट आहे ? केवढ्या वेगानें तो धोंडा पाण्यावर आदळेल ? व एका सेकंदांत आकर्षण किती फूट घडतें ? तें सांगा.

प्रश्नाप्रमाणें वरील समीकरणांत ज्ञात राशी मांडून—

$S = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times ३२ \times (७\frac{1}{2})^2 = ९००$ फूट धबधब्याची खोली.

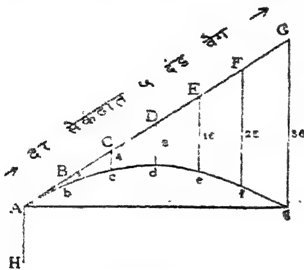
$v = \sqrt{(2gS)} = \sqrt{(२ \times ३२ \times ९००)} = २४०$ फूट धोंड्याचा वेग.

$g = 2S/t^2 = (२ \times ९००) \div ५६\frac{1}{4} = ३२$ फूट आकर्षण.

(२८) लेख २३ मध्यें वर्णिलेला पतनाचा प्रयोग थोडक्या श्रमानें करून पहाण्याची इच्छा असेल तर एक फळी किंचित् उतरती ठेवून तिच्या उतरत्या पृष्ठभागावरून एक लांकडी चेंडू सोडावा, म्हणजे तो फारच मंद्गतीनें खालीं सरकत जाईल. भूमीला टेंकलेल्या फळीच्या टोंकापासून, चढतीकडे २ फुटांवरून चेंडू सोडला तर, तो एका सेकंदांत जमीनीवर येईल इतकाच त्या फळीचा उतार ठेवावा. मग जमीनीपासून चढतीकडे ८ फूट अंतरावरून तोच चेंडू सोडला तर त्याला जमीनीवर येण्याला २ सेकंद लागतात. १८ फूट अंतरावरून सोडला तर ३ सेकंद लागतात, असें सेकंददर्शक घड्याळावरून दिसून येईल. यांत घर्षण व वातावरणाचा विरोध, हीं जमेस धरलीं पाहिजेत.

(२९) भूपृष्ठावर तिर्कस (तिर्यक्) फेंकलेल्या पदार्थाचा गमनमार्ग, परिलेखनपद्धतीनें (*Graph* पद्धतीनें) काढणें.

(आकृ. ८) येथें AH या भूमध्याकडे जाणाऱ्या रेषेशीं HAB येवढा विशाल कोन करून, दर सेकंदास ५ दंड या वेगानें A पदार्थ, फेंकला आहे. ही सकृत्प्रेरणा, एकटीच असती तर A पदार्थ ६ सेकंदांत G येथें आला असता. परंतु A एथून निघतांच त्याजवर पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणाचा अंमल सुरु झाला. त्यामुळें तो $ABCDEFG$ या सरळ मार्गानें न जातां, त्या त्या सेकंदाच्या शेवटीं $abcdefg$ या वक्र मार्गानें जाईल. Bb, Cc, Dd, Ee या रेषा, जरी भूमध्यामध्यें मिळतात तरी भूपृष्ठाजवळ त्या परस्परांस समांतर आहेत असें म्हणण्यास हरकत नाहीं. हा परिलेख सकृत्प्रेरणा व संततप्रेरणा यांच्या एकीकरणांचें एक उदाहरण आहे.



आकृति ८.

वरील आकृति (८) वरून दिसून येतें कीं, A येथून फेंकलेल्या पदार्थाचा Ag हा आडवा पल्ला (*Range*) म्हणजे क्षितिजसमांतर दिशेचें गमन, HAB कोन आणि AB वेग, या दोन गोष्टीवर अवलंबून असतें. A येथें रोखलेल्या तोफेचा गोळा Ag अंतरावरील निशाणावर लागू करावयाचा असल्यास तोफ रोंखण्याचा HAB कोण किती अंशाचा आसावा, आणि तोफेच्या बारामध्यें किती

दारू असावी, याचें प्रयोगावरून ठरविलेलें एक कोष्टक गोलंदाजाजवळ असतें. हें Ag अंतर नेहमींच्या संवयीनें अथवा त्रिकोणमितीनें ठरवितां येतें.

फेंकलेल्या पदार्थाचा $ABCD$ हा वक्रमार्ग परावलाकार असतो असें सिद्ध करतां येतें.

(३०) घड्याळाचा लंबक जो सदोदित झोके घेत असतो, त्याचें कारणही पूर्वोक्त दोन प्रेरणाच आहेत. लंबकाला ढकलण्याची सकृत्प्रेरणा सभोंवतालच्या सतत घर्षणामुळें, सतत कमी होत जाते ती भरून काढण्या-साठीं, घड्याळांत कमानीची योजना केली असते.

(३१) लंबकाच्या गुरुत्वमध्यापासून टांगलेल्या बिंदूपर्यंतचें अंतर कायम असेपर्यंत लंबकाचे झोके, लहान असोत किंवा मोठे असोत, प्रत्येक झोक्याचा अवधि समान असतो. ही गोष्ट खालीं सिद्ध केली आहे.

७ व्या आकृतींत P हा लंबकाचा गुरुत्वमध्य आहे. OP, OQ, OQ' या आंदोलन–कंसाच्या त्रिज्या आहेत. PQQ', हा आंदोलन मार्ग आहे. OP भूमध्याकडे जाणारी रेषा आहे. QR, $Q'R'$ रेषा OP रेषेला समांतर असून $QR=Q'R'$ आहे. OQ,OQ' पुढें वाढवून, $RS\ R'S'$ रेषा, त्याच्यावर लंब काढल्या आहेत. म्हणून RSQ, $R'S'Q'$ हे काटकोन आहेत. $OP,QR,Q'R'$ या रेषा परस्परांस समांतर आहेत. म्हणून POQ,RQS हे कोन समान आहेत, आणि $POQ',R'Q'S'$ हेही कोन समान आहेत.

आकृति ७.

OP लंबक P कडे परत जाण्याचे वेळीं $QR,Q'R'$ हे लेख २४ प्रमाणें गुरुत्वाकर्षणाचे हिसके आहेत म्हणून ते समान आहेत. लेख २२ आकृति ४, यांत दाखविल्याप्रमाणें $SR,S'R'$ या रेषा, $QR,Q'R'$ या समान गुरुत्वा-कर्षणाच्या पृथक्करणापासून उत्पन्न होणारीं घटकाकर्षणें आहेत ($SR=g'$ $S'R'=g''$ समजा). त्याचप्रमाणें $SR,S'R'$ या रेषा, $RQS,R'Q'S'$ या कोनांच्या भुजज्यांच्या प्रमाणांत आहेत.

परंतु जेव्हां कोन लहान असतात तेव्हां त्यांच्या भुजज्या, कंसाच्या प्रमाणांत, म्हणजे, येथें आंदोलन मार्गाच्या प्रमाणांत, असतात. आंदोलन व पतन हीं एकच आहेत. फक्त त्यांच्या दिक् भेदामुळें, त्यांनां भिन्न नांवें देण्यांत आलीं आहेत. समजा,

$$QP=S' \,;\, Q'P=S'' \text{ व } SR=g' \,;\, S'R'=g''$$

$$\therefore \frac{QP}{SR}=\frac{Q'P}{S'R'} \,;\ \text{किंवा } \frac{S'}{g'}=\frac{S''}{g''} \,;\ \text{असें होतें.}$$

म्हणजे लंबकावर झोंक्याच्या दिशेंत घडणारें घटकाकर्षण, झोंक्याच्या लांबीच्या प्रमाणांत असतें हें सिद्ध झालें.

लेख २७ यांतील पतनाचें समीकरण $S=\frac{1}{2}gt^2$ असें आहे. याला स्थलांतरानें (*Transposition*) $S/g=\frac{1}{2}t^2$ हें रूप प्राप्त होतें. आंदोलन मार्गांत (झोक्यांत) कोठेंही S/g हें पद, स्थिर म्हणजे, आपल्याशीं सर्वत्र समान असतें, असें वर सिद्ध केलें आहे. अर्थात् S/g हा पहिला पक्ष जर स्थिर असतो, तर $\frac{1}{2}t^2$ हा दुसरा पक्षही स्थिर असला पाहिजे. म्हणजे दुसऱ्या पक्षांतील t हा कालही स्थिर असतो.

म्हणून लंबकाची लांबी कायम असेपर्यंत लंबकाचे झोके लहान असोत किंवा मोठे असोत, त्यांचा अवधि समान असतो हें सिद्ध झालें. आंदोलन चाप जितकें लहान असेल किंवा OP त्रिज्या जितकी मोठी असेल तितका हा सिद्धांत ज्यास्त सत्य असतो, कारण ज्या—चाप-साम्याच्या पायावरच, हा सिद्धांत रचिला आहे.

(**३२**) ख्रिस्ती देवळांत लांब काढणीनें टांगलेल्या कांचेच्या हंडीचीं आंदोलनें, आपल्या नाडीच्या ठोक्याशीं ताडून पाहून, ग्यालिलिओ यानें हा नियम प्रथम शोधून काढला. याच नियमाच्या आधारावर, लंबकाच्या घड्याळाची रचना केली असते. या नियमाला **कालसाम्य** (*Synchronism*) म्हणतात. परंतु घड्याळांतील आंदोलन—कोन बराच मोठा असतो आणि हवेच्या शीतोष्णामुळें आंदोलकाच्या तारेची लांबी कमीजास्त होत असते म्हणून उत्तम आंदोलक बराच जड करून तो तारेबद्दल लांकडीपट्टीनें टांगला असतो. किंवा तारेच्या प्रसरणाकुंचनाची प्रतिक्रिया होण्याजोगी निराळी रचना केली असते.

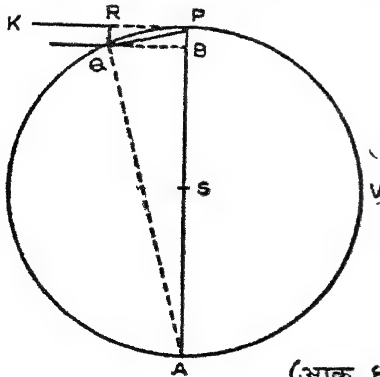
प्रकरण ५ वें.

सूर्याचें आकर्षण.

(३३) ज्या रीतीनें लेख २३-२७ यांत, भूपृष्ठावर पडणाऱ्या पदार्थाच्या पतनावरून, त्यांजवर पृथ्वीचें आकर्षण किती पडतें, हें काढितां येतें, त्याच रीतीनें सूर्याच्या दिशेंत होणाऱ्या ग्रहांच्या पतनावरून, त्यांच्यावर सूर्याचें आकर्षण किती घडतें हें काढितां येतें. भेद इतकाच कीं, भूपृष्ठावरील पदार्थाचें पतन आम्हांस प्रत्यक्ष प्रयोगावरून जसें मोजतां येतें, तसें सूर्याच्या दिशेंत घडणारें ग्रहाचें पतन प्रत्यक्ष मोजतां येत नाहीं. हें काम ग्रह व सूर्य यांच्यामधील **मध्यमांतर** व ग्रहाचा, सूर्याभोंवतीं एक प्रदक्षिणा करण्यास लागणारा **काल**, या दोहोंच्या मदतीनें करितां येतें. यांपैकीं मध्यमांतर प्रदक्षिणेच्या कालावर अवलंबून असतें म्हणून वस्तुतः ग्रहाच्या प्रदक्षिणाकालावरूनच ग्रहावरील सूर्याचें आकर्षण काढतां येतें.

सूर्यसंस्थेचा विस्तार मोठा असल्यामुळें, या कामीं कालाचें मूलमान, एक सेकंद न धरितां, एक दिवस धरण्याचा, ज्योतिर्विदांचा संप्रदाय आहे. तसेंच सूर्याच्या आकर्षणाला F ही संज्ञा आणि ग्रहाच्या प्रदक्षिणा कालाला T, ही संज्ञा देण्याची वहिवाट आहे.

(३४) आकृति ६ पहा. येथें AQP ही एक वर्तलाकार ग्रहकक्षा आहे. तिच्या मध्यबिंदुस्थानीं S हा सूर्य आहे, आणि P हा ग्रह आहे. PR ही, P स्थानची स्पर्शरेषा असून, PSA हा कक्षेचा व्यास आहे. तसाच $RPBQ$ हा काटकोन चौकोन आहे.



(आकृ. ६)

P ग्रह, P स्थानीं आल्यावेळीं PR ही त्याची एका दिवसाची गति आहे. P ग्रहावर सूर्याचें आकर्षण नसतें तर तो गोफणींतील सोडून दिलेल्या दगडाप्रमाणें, एका दिवसांत R येथें आला असता

पण सूर्याच्या आकर्षणाच्या सतत हिसक्यांमुळें तो $RQ=PB$ इतका खालीं येतो. म्हणून हें त्याचें एका दिवसाचें पतन आहे. आतां भूमितिरीतीनें PB ची लांबी काढली पाहिजे. AQP व BQP त्रिकोणामध्यें AQP, PBQ हे काटकोन असून, QPB कोन दोहोंस साधारण आहे. म्हणून हे दोनही त्रिकोण सरूप आहेत. सरूप त्रिकोणाच्या धर्माप्रमाणें.

$$AP : PQ : : PQ : PB = \text{पतन}$$

$$\therefore \text{ पतन } PB = \frac{PQ^2}{AP} = \frac{PQ^2}{2SP}$$

(३५) लेख २७ यांतील $g=2S/t^2$ या समीकरणांत $t=1$ मानिलें तर $g=2S$ असें होतें. म्हणजे कालाच्या मूलमानांत जितके पतन घडतें त्याच्या दुपटीइतकें आकर्षण असतें;

$$\therefore \quad F = 2PB = \frac{PQ^2}{SP} \quad \dots \quad \dots \quad (१)$$

यांत PQ^2 स्थिर कल्पिला तर, परमाणुगणितशास्त्राप्रमाणें F आकर्षण SP^{-2} प्रमाणें म्हणजे, अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत बदलतें असें सिद्ध होतें.

(३६) आतां या सूर्याच्या आकर्षणाच्या समीकरणापासून, वरील आकर्षणाचा नियम, म्हणजे, आकर्षण व सूर्यापासून ग्रहापर्यंत जें अंतर, त्याचा संबंध दाखविणारें समीकरण भूमितीपद्धतीनें सिद्ध करून दाखवितों.

वरील (१) समीकरणाच्या दोन्ही पक्षांस SP^2 नें गुणून

$$F.SP^2 = PQ^2.\ SP\ ; \quad \dots \quad \dots \quad (२)$$

व्यासाला ($2SP$) व्यासपरिघाच्या गुणोत्तरानें (π) गुणिलें म्हणजे परिघ येतो. परिघाला प्रदक्षिणा कालाच्या दिनसंख्येनें (T) भागिलें म्हणजे, एका दिवसांत क्रमिलेल्या कंसाची (PQ) लांबी ($2\pi.\ SP/T$) निघते. इचा वर्ग (PQ^2) वरील समीकरणांत मांडला तर,

$$F.\ SP^2 = 4\pi^2.\frac{SP^3}{T^2} \quad \dots \quad \dots \quad (३)$$

समीकरण (२) याची दुसरी बाजू स्थिर आहे. म्हणून, तिचें रूपांतर जी समीकरण (३) ची दुसरी बाजू, तीही स्थिर आहे; पण

जेव्हां दोन राशींचा गुणाकार स्थिर असतो, तेव्हां त्यांचें व्यस्त प्रमाण (*Inverse Proportion*) असतें. म्हणून F आकर्षण SP अंतराच्या वर्गाच्या, व्यस्त प्रमाणांत असतें, हा आकर्षणाचा नियम सिद्ध झाला.

समीकरण (३) याचा दुसरा पक्ष स्थिर असून, त्याचा पहिला अवयव $4\pi^2$ स्थिर आहे म्हणून SP^3/T^2 हा दुसरा अवयवही स्थिर असला पाहिजे. अर्थात् **ग्रहांचे प्रदक्षिणाकालांचे वर्ग, त्यांच्या मध्यम मंदकर्णांच्या घनाच्या प्रमाणांत असतात**, हा केप्लरचा ३ रा नियमही सिद्ध झाला (लेख ७० पहा). T^2/SP^3 याची किंमत, सर्व ग्रहांच्या संबंधानें सारखीच म्हणजे सुमारें १३३४१० निघते. (आमच्या मराठी ग्रहगणिताचें पृष्ठ १०४ पहा).

विशेष—पूर्वोक्त आकर्षणाचा नियम वर्तुलाकार कक्षांच्या संबंधानें मात्र जरी सिद्ध झाला आहे तरी दीर्घवर्तुल, परावला, हैपरवला, या शंकुच्छिन्नाकृतिकक्षांनां देखील तो सहज लागू करितां येतो. कारण या आकृतींतील कोणत्याही बिंदूंतून वर्तुलाकार कक्षा गेली आहे, असें जर कल्पितां येतें तर त्यांच्या छेदन बिंदु–स्थानचा आकर्षणनियम, त्या दोनही कक्षांस सारखाच लागू असला पाहिजे, हें उघड आहे. म्हणून कक्षा वर्तुल असो, दीर्घवर्तुल असो, किंवा इतर कोणत्याही प्रकारची असो, आकर्षण अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत बदलत जातें हा महासिद्धांत सूर्य-संस्थेमध्येंच नव्हे तर सूर्यसंस्थेच्या बाहेर देखील अमलांत असला पाहिजे. (लेख ९९ पहा.)

आकर्षणाच्या नियमाची पूर्वोक्त सिद्धता आमची आहे. ही न्यूटननें दिलेली नाहीं. त्यानें कक्षाकृतिपरत्वें निरनिराळ्या सिद्धता दिल्या आहेत. (प्रकरणें १० व ११ पहा.) त्याच्या सिद्धतेंत $2h^2 QR/QT^2$ हा स्थिरांक सिद्ध केला आहे. आमच्या सिद्धतेंत $4\pi^2 SP^3/T^2$ हा स्थिरांक आहे. या दोहोंचें साम्य खालीं सिद्ध करून दाखवितों. आमच्या स्थिरांकाच्या अंशच्छेदांना SP नें गुणिलें तर त्याची किंमत बदलत नाहीं म्हणून तो—

$$\frac{4\pi^2 SP^4}{T^2} \times \frac{1}{SP}$$ असा होतो यांतील

$$\frac{4\pi^2 SP^4}{T^2} = \frac{(\text{द्विगुणकक्षा क्षेत्रफल})^2}{(\text{प्रदक्षिणाकालदिन})^2} = h^2 \text{ (ले. ४३).}$$

आणि समीकरण (१) प्रमाणें—

$$2\,PB = \frac{PQ^2}{SP};$$ यांत $PB = QR$; व संहित दर्शेत $PQ = QB = QT$; आकृति (१९).

$$\therefore \frac{1}{SP} = \frac{2\,PB}{P\,Q^2} = \frac{2\,Q\,R}{Q\,T^2};$$

$$\therefore 4\,\pi^2 . \frac{SP^3}{T^2} = 2h^2 . \frac{QR}{QT^2} = \mu \text{ म्यू.}$$

टीप—आकर्षणसमीकरणांतील स्थिरांकाला μ ही संज्ञा दिली आहे.

या स्थिरांकाच्या रूपांतरापासून (भूदिनगतिकलावर्ग × भूमध्यमांतरघन) = ३४९६·३ कला, हा स्थिरांक उत्पन्न होतो. **उदाहरण १ लें**— गुरूची दिनगति ५ कला आहे तर त्याचें मध्यमांतर किती? ३४९६′·३÷२५′ = १३९·८५, याचें घनमूळ ५·२ हें गुरूचें मध्यमांतर आहे. **उदाहरण २ रें**— इंद्राचें मध्यमांतर ३० आहे तर त्याची दिनगति केवढी? ३४९६′·३÷२७००० = ०′·१२२ याचें वर्गमूल ०′·३५ कला = २१ विकला ही इंद्राची दिनगति आहे. (मराठी ग्रहगणित पृष्ठ ८१ पहा.)

(**३७**) **सूर्याच्या आकर्षणाचें मूलमान** (unit):— ज्या अर्थी सूर्याचें आकर्षण (F) हें मध्यमांतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत बदलत असतें, त्या अर्थी गणिताच्या सोईसाठीं कांहीं एका सर्व संमत मध्यमांतरावरील आकर्षणाला मूलमान मानावें लागतें. पृथ्वी सूर्यापासून आपल्या मध्यमांतरा इतकी दूर असतांना तिच्यावर एका दिवसांत सूर्याचें जेवढें आकर्षण घडतें, तेंच सूर्याच्या आकर्षणाचें मूलमान मानावें, असें सर्व **पाश्चात्य** ज्योतिर्विदांनीं एकमतानें ठरविलें आहे. हे (μ) म्यू या ग्रीक अक्षरानें दाखविलें जातें. याचें मान ठरविण्याच्या कामीं पृथ्वीचे मध्यमांतर SP = १ व पृथ्वीचा नाक्षत्र प्रदक्षिणाकाल T = ३६५·२५६४ दिवस आणि व्यासपरिघांचें गुणोत्तर π = ३·१४१५९ हे मूलांक घेतले जातात.

$$F.\,SP^2 = 4\,\pi^2\,\frac{SP^3}{T^2} = \mu$$

यांत वरील मूलांक मांडून समीकरण सोडविलें म्हणजे म्यूची किंमत निघतें.

$$\mu = ४\,(३\cdot१४१५९)^२ \times \frac{१^३}{(३६५\cdot२५६४)^२}$$

$$\therefore \mu = \cdot००0२९५८४ = \cdot०००३; \text{ सुमारें.}$$

$\therefore F \cdot SP^2 = \mu$, आणि $F = \frac{\mu}{SP^2}$; हें इष्ट ग्रहावरील इष्ट कालीन आकर्षणाचें मान होतें.

उदाहरण—(लेख ८८ पहा). ज्या दिवशीं मंगळाचा मंदकर्ण १·६३७४ असेल, त्या दिवशीं मंगळावर सूर्याचें आकर्षण किती ?

$$F = \frac{\mu}{SP^2} = \frac{\cdot 0003}{1 \cdot 6374} = \cdot 00018$$ हें इष्टकालीं मंगळा-वर सूर्याचें आकर्षण होतें.

टीप—सूर्यसंस्थेच्या मोजणीन म्हणजे ग्रहगणितांत पृथ्वीपासून सूर्यापर्यंत जें मध्यम अंतर अथवा पृथ्वीचा मध्यममंदकर्ण त्याला पाश्चात्य ज्योतिर्विद्, दैर्घ्य मापनाचा मानदंड (*unit of Length*) मानतात. यांची लांबी ९,३०,००,००० मैल आहे. म्हणजे सुमारें नऊ कोटी मैल किंवा ९३,००,००० योजनें आहे. म्हणून या उदाहरणांत—$F = \cdot 00019 \times 93,000,000 = 16200$ मैल हें मंगळावरील सूर्याचें आकर्षण आहे.

सूर्यापासून पृथ्वीचें मध्यमांतर ९ कोटी मैल मानिलें तर μ ची लांबी ९ कोटी × ·०००३ = २७००० मैल होतें, व ज्यापक्षीं कालाच्या मूल मानांतील अधःपतन, आकर्षणाच्या निम्में असतें. (लेख ३५); त्या अर्थी सूर्याच्या आकर्षणामुळें पृथ्वी पहिल्या दिवशीं, १३५०० मैल सूर्याकडे उतरते त्याचप्रमाणें भूमध्यापासून ४००० मैल दूर असणारे पदार्थ पहिल्या सेकंदांत १६ फूट पृथ्वीकडे येतात. (लेख २३ पहा). यावरून सूर्याचें आकर्षण पृथ्वीच्या आकर्षणाच्या किती पट आहे हें पुढील रीतीनें ठरवितां येतें.

(३८) सूर्याचें द्रव्य (*Mass*) **आणि त्याची घनता** (*Density*):— आकर्षण, द्रव्याच्या प्रमाणांत असतें असें मानिलें आहे. काल व दूरत्व समान असतील तरच, आकर्षणाची किंवा पतनाची तुलना वास्तविक होईल. म्हणून पृथ्वीपासून ९ कोटी मैल अंतरावर, पहिल्या दिवशीं पृथ्वीच्या आकर्षणामुळें, पदार्थ किती फूट खालीं उतरेल तें प्रथम ठरविलें पाहिजे. भूपृष्ठाजवळील पतन $S = \frac{1}{2}gt^2$ असतें. (लेख २७). आणि आकर्षण व पतन हीं अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत बदलतात. (लेख ३६). म्हणून $S = \frac{1}{2}gt^2/r^2$ हें **पृथ्वीच्या आकर्षणामुळें** घडणाऱ्या पतनाचें समीकरण आहे. यावरून एका दिवसांत म्हणजे $t = 86400$ सेकंदांत, ९ कोटी

मैलांवर म्हणजे r=९ कोटी ÷ ४ हजार = २३१०० इतक्या भूत्रिज्यांतरावर पृथ्वीकडे सूर्याचें किती फूट पतन घडेल, तें काढितां येतें. जसें:—

$$\text{सूर्याचें पतन} = S = \frac{\frac{१}{२}\times ३२ \text{ फूट} \times ८६४००^{२}}{२३१००^{२}} = २२४ \text{ फूट};$$

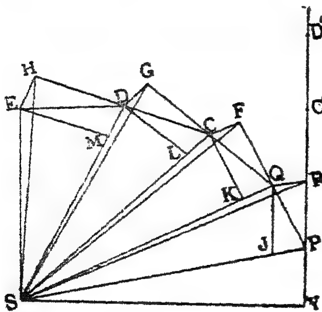
सूर्याकर्षणमूलक पृथ्वीचें पतन १३५०० मैल=७१२८०००० फूट असतें. म्हणून पृथ्वीच्या द्रव्यापेक्षां सूर्याचें द्रव्य ७१२८००००÷२२४=३२०००० पट जास्त आहे हें सिद्ध. आतां सूर्याचें घनफळ पृथ्वीच्या घनफळाच्या तेरा लक्षपट मोठें असून त्याचें द्रव्य फक्त सवातीन लक्षपट मोठें आहे, म्हणून पृथ्वीची घनता (किंवा दार्ढ्य) एक मानिली तर सूर्याची फक्त चतुर्थांस असली पाहिजे. (मराठी ग्रहगणित पान ८१ पहा.). सूर्यही तन्निष्ठ द्रव्याच्या प्रेरणाशरणत्वामुळें, दररोज २२४ फूट म्हणजे सुमारें १०० पावलें पृथ्वीकडे सरकत असतो. (ले. १५). सूर्याचें पतन म्हणण्यापेक्षां अभिसरण म्हणणें बरें.

प्रकरण ६ वें.

केप्लरचा दुसरा नियम.

(३९) ग्रह सूर्याभोंवतीं फिरत असतां त्यांचे मंदकर्ण सारख्या कालांत सारख्या क्षेत्रावरून जातात, हें सिद्ध करण्याचें.

आपण असें समजूं कीं, कोणें एके क्षणीं (आकृति ९) P ग्रह S या सूर्यापासून SP इतक्या अंतरावर असतांना त्याला PR दिशेंत एक टोला बसला. त्यावेळीं सूर्य नसतां तर, किंवा सूर्याच्या अंगीं आकर्षणशक्ति नसती तर, तो PD' या सरळ रेषेनें दररोज $PR, RC', C'D'$ हीं समान अंतरें चालून गेला असतां (लेख १६ पहा).



(आकृति ९)

परंतु त्याच क्षणीं S या सूर्यानें P ग्रह एका दिवसांत आपल्याकडे PJ इतका येईल असा एक त्याला हिसका

दिला. आतां P ग्रह PR आणि PJ या दोन प्रेरणाच्या अमलांत असल्या-मुळें, तो पहिल्या दिवसाच्या शेवटीं R येथें न येतां $PJQR$ या समांतर भुजचौकोनाच्या PQ या कर्णरेषेनें Q येथें येईल. (लेख २०).

दुसऱ्या दिवसाच्या आरंभीं सूर्य त्याला QK हिसका न देईल तर, तो ग्रह PQF या कर्णरेषेनें $PQ=QF$ येथें येईल. परंतु दुसऱ्या दिव-साच्या आरंभीं QS दिशेंत, सूर्याचा QK हिसका बसल्यामुळें दुसऱ्या दिव-साच्या शेवटीं तो F येथें न जातां $QKCF$ या समांतर भुजचौकोनाच्या QC कर्णरेषेनें चालून C येथें येईल. (लेख २०).

त्याचप्रमाणें तिसऱ्या दिवसाच्या आरंभीं CS दिशेंत CL हिसका बसल्यामुळें तो QCG दिशेनें $QC=CG$, G येथें न जातां $CLDG$ या समांतर भुजचौकोनाच्या CD या कर्णरेषेनें D येथें तिसऱ्या दिवसाच्या शेवटीं येईल. (ले. २०).

आणि याचप्रमाणें चौथ्या दिवसाच्या शेवटीं E येथें येईल.

आतां पहिल्या दिवसाच्या प्रारंभीं ग्रह P येथें होता तो पहिल्या दिवसाच्या शेवटीं Q येथें आला. त्यामुळें त्याचा SP मंदकर्ण (किंवा दावें म्हटलें असतां विशेष शोभेल;) पहिल्या दिवशीं PSQ त्रिकोणावरून फरफटत गेला, असें होतें. दुसऱ्या दिवशीं QSC त्रिकोणावरून, तिसऱ्या दिवशीं CSD त्रिकोणावरून चवथ्या दिवशीं DSE त्रिकोणावरून तो फरफटत गेला असें झालें.

(४०) आतां या चारही त्रिकोणाचीं क्षेत्रफलें समान आहेत असें सिद्ध करण्याचें.

$PQ=QF$; $QC=CG$; $CD=DH$; (रचनेप्रमाणें). PSQ,QSF हे त्रिकोण PQ,QF या समान पायावर असून, त्यांचा शिरोबिंदु एकच आहे, म्हणून युक्लीड पु. १. सिद्धांत ३८ प्रमाणें या दोनही त्रिकोणाचीं क्षेत्रफलें, समान आहेत.

पुनः QSC आणि QSF हे त्रिकोण SQ या एकाच पायावर आणि SQ,CF या समांतर रेषांच्या जोडांत आहेत. म्हणून युक्लीड पु. १. सिद्धांत ३७ प्रमाणें या दोन त्रिकोणांचीं क्षेत्रफलें समान आहेत.

परंतु PSQ त्रिकोण QSF त्रिकोणासमान आहे असें पूर्वीं सिद्ध केलें आहे म्हणून (युक्लीड पु. १ प्रत्यक्ष प्रमाण १ लें).

.·. त्रिकोण PSQ=त्रिकोण QSC.

पुनः त्रि. QSC=त्रि. CSG; कारण यांचे पाय QC, CG समान आहेत. आणि शिरोबिंदु S हा दोहोंस साधारण आहे.

तसेंच त्रि. CSG=त्रि CSD; कारण ते CS या एकाच पायावर आणि CS,DG या समांतर रेषांच्या जोडांत आहेत.

.·. त्रिकोण CSD= **त्रिकोण** QSC, (प्रत्यक्ष प्रमाण १ लें.)

परंतु वर त्रि. QSC= त्रि. PSQ असें सिद्ध केलें आहे. म्हणून PSQ,QSC,CSD, हे त्रिकोण समान आहेत. म्हणजे यांचीं क्षेत्रफळें परस्पर समान आहेत. याचप्रमाणें PSQ,QSC,CSD,DSE इत्यादि सर्व दैनिक किंवा क्षणिक क्षेत्रें समान असतात, असें सिद्ध करितां येतें.

म्हणून ग्रह, सूर्याभोंवतीं फिरत असतां त्यांचा मंदकर्ण SP, सारख्या कालांत सारखीं क्षेत्रें चालून जातो. म्हणजे ग्रहाच्या मंदकर्णानें आक्रमिलेलीं क्षेत्रें आक्रमणाला लागणाऱ्या कालाच्या प्रमाणांत असतात हा केप्लरचा दुसरा नियम सिद्ध झाला. ग्रहगणिताचीं पृष्ठें १०९–११८ यांतील मंदफलाच्या उपपत्तिला हाच नियम मुख्य आधार आहे.

(४१) सूर्याच्या आकर्षणाचे हिसके, एकेका दिवसाच्या अंतरानें बसतात असें जें आम्ही वर कल्पिलें आहे, तें केवळ सिद्धतेच्या सोयीसाठीं आहे. या ढोबळ कल्पनेमुळें $PQCDE$ हा कक्षेचा भाग बहुकोनाकार निघाला आहे. परंतु वस्तुतः दर सेकंदांत आकर्षणाचे हजारों हिसके बसत असल्यामुळें हे कोपरे दिसतनासें होतात. आणि कक्षादर्शक रेषा, एक सुंदर गुळगुळीत वक्ररेषा उत्पन्न होते. (पहा लेख २५).

(४२) मागील लेख ४० यांतील प्रतिपादनावरून असें दिसून येतें कीं, सूर्याभोंवतीं समान कालांत समान क्षेत्रें आक्रमण्याचा ग्रहांचा जो नियम आहे, तो अबाधित चालण्यास **आकर्षणाचा रोंख नेहमीं सूर्याकडे असणें**, ही एकच अट पुरें आहे. आकर्षणाचा नियम अंतराच्या समप्रमाणाचा असो, व्यस्तप्रमाणाचा असो, अथवा कोणत्याही घाताचा असो, त्याचा वरील नियमाशीं यत्किंचितही संबंध नाहीं. फार कशास,

आकर्षण मुळींच नसलें तरी, PSR, RSC, CSD क्षेत्रें समान असणारच. आकर्षणाबद्दल परावर्तन *Repulsion* असलें तरी, या नियमाला बाध येणार नाहीं.

दुसरी अशी एक गोष्ट दिसून येतें कीं, $SPQCDE$ ही ग्रहकक्षेची पातळी, सूर्यमध्यबिंदूंतून गेली असते, म्हणून ती अचल असली पाहिजे.

(४३) ग्रहाचा रेखीय वेग (v) अथवा गतिः— (आकृति ९ पहा.) येथें RSP त्रिकोणाची RP बाजू मागें वाढवून तिजवर S या सूर्यापासून SY लंब काढला आहे. कोणत्याही त्रिकोणाची एक बाजू वाढवून तिजवर शिरोबिंदूपासून लंब काढला तर ती बाजू व लंब यांचा गुणाकार त्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट असतो. या क्षेत्रफळाच्या दुपटीला h, आणि लंबाला p म्हणूं. PQ, QC, CD, DE या रेषा संलग्नावस्थेंत म्हणजे केवळ बिंदुद्वयरूपी असतां वेग (v) दर्शवितात. त्या पुढें किंवा त्या मागें वाढविल्या तर त्या त्या ठिकाणीं काढलेल्या कक्षेच्या स्पर्शरेषा होतात. म्हणून त्या वाढवून त्यावर SY प्रमाणें लंब काढले आहेत असें समजा. तर PSQ, QSC, CSD इत्यादि प्रात्यहिक त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांची दुप्पट h ही त्यांचा पाया व लंब यांच्या गुणाकारायेवढी असली पाहिजे. **पण रोजचीं क्षेत्रफलें समान असतात.** असें लेख ४० यांत सिद्ध केलें आहे. म्हणून h हा स्थिरांक (*Constant*) आहे.

$\therefore$ बाजू $\times$ लंब $= h$ स्थिरांक.

$v \times p = h =$ स्थिरांक.

$$v = \frac{h}{p}\ ; \quad \therefore\ v \propto \frac{1}{p}$$

म्हणून ग्रहांचा वेग सूर्यापासून त्यांच्या स्पर्शरेषेवर काढलेल्या लंबाच्या व्यस्त प्रमाणांत असतो.

प्रकरण ७ वें.

बैंद्वभूमिति आणि अंतिमगुणोत्तर.

(४४) बिंदू म्हणजे ज्याला स्थितिमात्र आहे, पण महत्त्व किंवा भाग नाहींत तो. ही **युक्लीडची** बिंदूची व्याख्या आहे. परंतु, अशा बिंदूची कल्पना करणें, शक्य नाहीं. ज्याला अल्प देखील महत्त्व नाहीं, तें असत् होय. असत् पासून सत्, किंवा असत् मिळून सत् होणें संभवत नाहीं. सत्‌शिवाय मानसिक व्यापार, अगर लौकिक व्यवहार, यांचा प्रारंभच्च होत नाहीं, म्हणून बिंदूला जेणेंकरून व्यवहार्यता येईल, अशी नवीन व्याख्या करणें अवश्य आहे.

(४५) **बिंदू** म्हणजे अत्यल्प वर्तुल, असें कीं ज्याची त्रिज्या, डोळयांना किंवा सूक्ष्मदर्शकयंत्रांतून देखील न दिसली तरी, जिच्या अस्तित्वाची कल्पना मनाला करितां येते. याचप्रमाणें **परमाणु** म्हणजे, अत्यल्प द्रव्य असें कीं, ज्याचे परिमाण डोळयांना अगोचर असलें तरी, तें मनाला कल्पितां येतें. अशा व्याख्या केल्या तर, रेषा व तिचे अवयव जे असंख्य बिंदू, तसेंच पदार्थ व त्याचे घटकावयव जे असंख्य परमाणु, त्यांनां समान गणितयोग्यता, व व्यवहार्यता प्राप्त होते, म्हणजे रेषा जशा भूमितीला विषय आहेत, तसेंच त्यांचे अवयव जें बिंदू तेही भूमितीला विषय होतात. त्यामुळें रेखीय भूमितीसिद्धांत जितके सत्य आहेत, तितकेच बैंद्वभूमितिसिद्धांतही सत्य आहेत, अशी खात्री होते.

(४६) बैंद्वभूमितींत असले दोन बिंदू एकमेकांस लागले म्हणजे, त्यांची एक बैंद्व सरळ रेषा होते. तीन बिंदू एकमेकांस एकापुढें एक लावले म्हणजे, दोन बैंद्वसरळरेषा उत्पन्न होतात. या दोन सरळरेषा एकाच दिशेंत नसतील तर त्या दोन्ही मिळून, एक बैंद्ववक्ररेषा होते. या तीनही बिंदूंतून जाणाऱ्या वर्तुलास, वक्रतादर्शक वर्तुल (*Circle of curvature*) किंवा तात्कालिक वर्तुल (*Instantaneous Circle*) म्हणतात.

बिंदुद्वयमात्र रेषेला, बैंद्व रेषा म्हणतात. अशा स्थितीला बैंद्वदशा, संलग्नावस्था, संहितावस्था, संहितदशा, हीं नांवें आम्हीं योजिलीं आहेत; कारण **" परः सन्निकर्षः संहिता "** ही **पाणिनीय** व्याख्या, येथें लागू

होते. संहितदर्शंत PR रेषा, (आ. १२ पाहा) वर्तुळ परिघाचे दोन संलग्न बिंदूनीं झाली असते. म्हणजे तिचे P, R, हे दोन्ही बिंदू, परिघावरच असतात हें ध्यानांत ठेवावें; वर्तुळ व सरळरेषा यांचे स्पर्शस्थानीं, बैंदव रेषा असते, बिंदु असत नाहीं हें निराळें सांगण्याची आवश्यकता नाहीं.

(४७) परमाणुगणिताची मूल कल्पना:—

दैर्घ्य, क्षेत्र, किंवा पिंडदर्शक, कोणत्याही संख्येला मूलमान कल्पून त्याचे भाग, प्रभाग, विभाग, प्रतिविभाग इत्यादि समान गुणोत्तरानें लहान लहान होत गेले आहेत, असें मानणें हा परमाणुगणिताचा **पाया** आहे. दशांश गणित, हा त्याचा एक विशेष प्रकार आहे. सूर्याच्या द्रव्याला मूलमान कल्पिलें तर, आणि त्याचे भाग, प्रभाग, विभाग, प्रतिविभाग यांच्यामध्यें सहस्रांशांचें गुणोत्तर कल्पिलें तर, गुरू हा प्रथम दर्जाचा किंवा श्रेणीचा परमाणु होतो. मंगळ हा द्वितीय श्रेणीचा परमाणु होतो. आमचा चंद्र हा तृतीय श्रेणीचा परमाणु होईल. लेखांक २७ यांतील पतनास मूलपिंड मानिला तर, वेग हा त्याचा प्रथम परमाणु होतो, व आकर्षण द्वितीय श्रेणीचा परमाणु होतो. कारण तेथें $v^2 = 2gS$ आहे. म्हणून* $S : V : 2g$ अशीं समान गुणोत्तरें निघतात.

परमाणूंच्या पिंडीकरणांत ज्या दर्ज्याच्या परमाणूंपर्यंत, सूक्ष्मता इष्ट असते त्याच्या खालच्या दर्ज्याच्या परमाणूंची उपेक्षा केली तरी चालते.

चंद्राच्या द्रव्यापेक्षां, पृथ्वीचें द्रव्य, ८० पट जास्त आहे आणि पृथ्वीच्या द्रव्याच्या ३२०००० पट, सूर्याचें द्रव्य आहे. म्हणून चंद्राच्या द्रव्याच्या २५६०००००० पट सूर्याचें द्रव्य जास्त आहे. अर्थात् सूर्यापुढें चंद्र कःपदार्थ आहे. म्हणून सूर्य ± चंद्र = सूर्य; असें मानण्यास हरकत नाहीं.

(४८) वर्तुळ आणि त्याची वक्रता:—

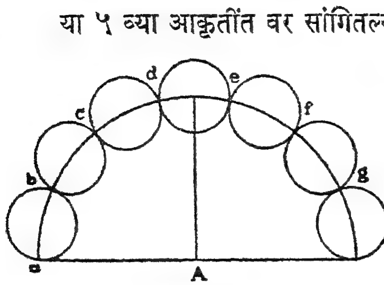
रेषा सरळ असो वा वक्र असो, तिचे परमाणु भाग, बिंदूरूप असतात असें ले. ४६ यांत सांगितलें आहे. त्याची स्थूल कल्पना पुढील रीतीनें आणून देतां येते. एक हात लांबीची एक बारीक तार घेऊन, तिच्या दोन्हीं

---

* लेखांक २४ यांतलि प्रयोगजनित वेग, त्या त्या सेकंदाच्या मध्यकालचे आहेत. समाप्तिकालीन वेग पूर्वोत्तर वेगाच्या बेरजेचा निंमा असतो. उदाहरणार्थ, ४ सेकंदाचा समाप्तिकालीन वेग, $\frac{1}{2}$ (७+९) = ८ दंड आहे म्हणून १६:८:४

टोकांपर्यंत मणी ओवावे. मग तिचीं टोकें ताणून धरलीं तर, तिची एक सरळ रेषा होते. आणि ती पाहिजे तशी वाकवून तिला वर्तुल, दीर्घ वर्तुल, परावला, हैपरबला, इत्यादि वक्राकृतींचीं रूपें देतां येतात.

या ५ व्या आकृतींत वर सांगितल्याप्रमाणें तारेमध्यें मणी ओवून तिला वांकवून तिचे $a\ b\ c\ d\ e$ इत्यादि एक अर्धवर्तुल केलें आहे. त्यांतील प्रत्येक मणी एकेक बिंदु आहे. $ab\ bc\ cd$ हे मणी इतके लहान आहेत कीं ab व्यासाचें a टोंक b टोंकाला लागलें आहे. bc व्यासाचें b



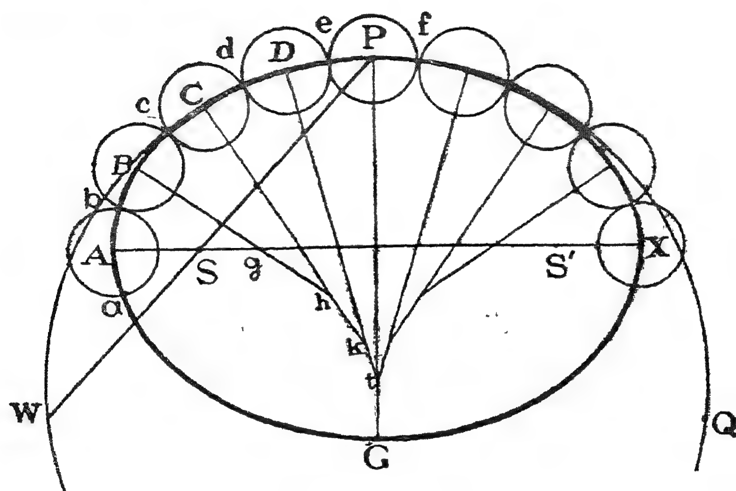
(आकृति १०)

टोंक c टोंकाला लागलें आहे. cd व्यासाचें c टोंक d टोंकाला लागलें आहे. याप्रमाणें इतर मण्यांविषयीं समजावें. आतां ab, bc, cd इत्यादि व्यासांचे मध्यबिंदूंतून, A ह्या वर्तुलमध्याकडे लंब रेषा काढल्या तर वर्तुलधर्मा-प्रमाणें त्या सर्व A ह्या मध्यबिंदूंत मिळतात. म्हणजे वर्तुल ही आकृति एकाच त्रिज्येच्या वर्तुळाच्या परिघाचे लहान लहान असंख्य तुकडे जोडून केलेली आहे असें म्हणतां येईल. यासाठींच वर्तुलाची वक्रता, परिघाच्या सर्व भागांत सारखीच असते.

(४९) दीर्घवर्तुल आणि त्याची वक्रता:—

येथें पूर्वींप्रमाणें एका तारेंत मणी ओवून तिला वांकवून, तिचें एक दीर्घवर्तुल केलें आहे. AX हा महाव्यास, PG लघुव्यास, S हा एक फोकस आहे. मागील आकृतीप्रमाणें येथेंही ab, bc, cd, ef व्यासांवर Bg, Ch, Dk, Pt लंब काढले आहेत. परंतु ते सर्व एकाच बिंदूंत मिळालेले नाहींत. प्रति दोन लंबांचें छेदस्थान निराळें आहे. यावरून असें सिद्ध होतें कीं, दीर्घवर्तुलाचा परिघ, क्रमानें वाढत किंवा घटत जाणाऱ्या त्रिज्यांनीं काढि-लेल्या वर्तुळांच्या परिघांचे लहान लहान असंख्य तुकड्यांचे जोडण्यापासून उत्पन्न जाहला आहे. अर्थात् दीर्घवर्तुलाच्या परिघांवरील प्रत्येक बिंदुस्था-नची वक्रता निराळी असते. पूर्वोक्त सर्व लंबांचे छेदनबिंदू g, h, k, t क्रमानें सांधून, जी वक्ररेषा उत्पन्न होते, तिला **जनयित्री** (*Evolute*) म्हणतात.

अशा जनयित्रीचे गुणधर्म, बैजिक भूमितींत सिद्ध केलेले असतात. या परिघावरील काढिलेल्या लंबांनां (*Normal*) म्हणतात. वरील वर्णन पराबला हैपरबला या आकृतींनांही लागू पडतें. म्हणजे या दोन्ही आकृति निरनिराळ्या त्रिज्यांनीं काढलेल्या वर्तुलांच्या परिघांचे तुकडे जोडून, झाल्या आहेत असें कल्पितां येतें.



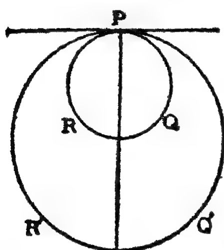
(आकृति ११.)

(५०) **वक्रतावर्तुल:**—आकृति ११ पहा. क्रमिक *(Consecutive)* दोन लंबांच्या छेदनबिंदूपासून, त्या लंबाएवढ्या त्रिज्येनें परिघावरील क्रमिक तीन बिंदूंतून जाणारें जें वर्तुल, त्याला वक्रतादर्शक किंवा वक्रतावर्तुल म्हणतात, असें ले. ४६ यांत सांगितलें आहे.

हीं वर्तुलें लंबाच्या लांबीप्रमाणें क्रमानें लहान किंवा मोठीं होत गेलीं पाहिजेत हें उघडच आहे. t या मध्यबिंदूंभोंवतीं tP त्रिज्येनें काढिलेलें PWQ हें अशा प्रकारचें वक्रतादर्शक वर्तुल आहे. PSW ही त्या PWQ वक्रतादर्शक-वर्तुलाची, दीर्घवर्तुलाच्या फोकसांतून जाणारी त्रिज्या आहे. $2Pt$ त्या वर्तुलाचा व्यास आहे. **वक्रता–वर्तुलाची** वक्रता, (*Curvature*) त्याच्या त्रिजेच्या व्यस्त प्रमाणांत असते. (आ. १२ पहा.) जितकीपट त्रिज्या मोठी, तितकी वक्रता कमी. एका वर्तुलाची त्रिज्या

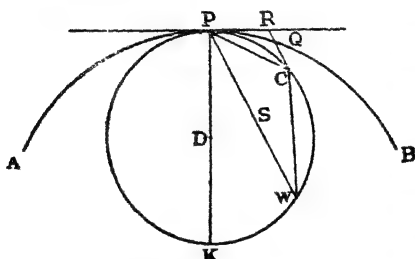
दुसऱ्या वर्तुलाच्या त्रिज्येच्या दुप्पट असेल तर पहिल्या वर्तुलाची वक्रता दुसऱ्या लहान वर्तुलाच्या वक्रतेच्या द्वितीयांश असते. जसजसें वर्तुल लहान लहान होत जातें तसतसें त्याची वक्रता वाढत जाते; जसजसें मोठें होत जातें, तसतशी त्याची वक्रता घटत जाते. म्हणून अनंत त्रिज्येच्या वर्तुलाची वक्रता शून्य असली पाहिजे. सरळ रेषेची वक्रता शून्य असते. म्हणून सरळ रेषा ही, ज्याची त्रिज्या अनंत आहे अशा वर्तुलाच्या परिघाचा एक भाग आहे असें म्हणण्यास हरकत नाहीं.

(५१) **अंतिम गुणोत्तर** (*Ultimate Ratio*)—



(आकृति १२)

पुढील सर्व सिद्धांत या दोन कल्पनांच्या आधारें सिद्ध केले आहेत. म्हणून वाचकांनां त्यांची पक्की जाणीव असणें जरूर आहे. या कल्पना सकृद्दर्शनीं चमत्कारिक वाटतात, पण थोडा विचार केला तर त्यांच्या सत्यतेची मनाला खात्री पटेल.



(आकृति १३).

आ. १३ यांत $APQB$ हा दीर्घवर्तुल, पराबला किंवा हैपरबला यांपैकीं एकाद्या वक्राकृतीच्या परिघाचा एक भाग आहे. PR ही P स्थानची स्पर्शरेषा आहे. $PCWK$ हें P स्थानची वक्रता–दर्शक वर्तुल आहे. PSW ही S या इष्ट बिंदूंतून पार जाणारी एक त्याची ज्या आहे. तिला CR रेषा समांतर आहे. हिला **संमुखी** (*Subtense*) म्हणतात.

आतां PR हा स्पर्शरेषेचा भाग आहे.
PQ हा दीर्घवर्तुलाचा भाग आहे.
चाप PC हा वक्रता–वर्तुलाचा भाग आहे.
PC ही त्याची ज्या आहे.

या चारही रेषा आकृतींत दाखविलेल्या स्थितींत समान नाहींत म्हणजे त्यांचीं आद्य गुणोत्तरें समान नाहींत हें उघडच आहे. परंतु CR ही संमुखी, PSW या इष्ट ज्येशीं आपलें समांतरत्व कायम राखून जसजशी P बिंदूकडे लोटत जाईल, तसतसें त्यांचें वैषम्य कमी होत जातें. आणि सरतेशेवटीं PR ही एक बैंदव रेषा होते. (ले. ४६ पहा). तेव्हां, म्हणजे संहितावस्थेंत, C,Q हे बिंदू R बिंदूंत लीन होतात. त्यामुळें चारही रेषा परस्परांस समान होऊन, त्यांचीं अंतिम गुणोत्तरें समान किंवा एकरूप होतात. याच कारणामुळें CR रेषा QR रेषेएवढी होते. संहितावस्था व दुष्काळ, यांत बरेंच साम्य आहे. सुकाळांत धान्यांच्या धारणींचीं गुणोत्तरें फारच भिन्न असतात. पण RC प्रमाणें जसजसा दुष्काळ लोटत जातो तसतशीं हीं गुणोत्तरें समान होत जातात आणि शेवटीं अंतिमावस्थेंत म्हणजे भयंकर दुष्काळांत, सर्व धान्यांची धारण एकच होते. याचा प्रत्यय १८७६ सालीं चांगला आला. व हल्लीं (मे १९१८) त येत आहे. संहितावस्थेंत RQ आणि PQ यांनां अनुक्रमें आकर्षण व वेग हीं नांवें प्राप्त होतात. या गोष्टी एकदां पक्क्या बुद्धिस्थ झाल्या म्हणजे पुढील उपपत्तीचा मार्ग सुगम होतो.

(५२) पराकाष्ठा (*Limit*)— **बिंदूपासून क्रमानें वाढत जाणाऱ्या राशींच्या** (*quantities*) **अंतिम मर्यादेला पराकाष्ठा** (*ultimate*) ह नांव आम्हीं योजिलें आहे. त्रिज्या व व्यास ह्या अनुक्रमें भुजज्या व ज्या यांच्या पराकाष्ठा आहेत. व्यास हा व्युत्क्रमज्येची (*Versed Sine*) मर्यादा किंवा पराकाष्ठा आहे. आनंत्य (*Infinity*) हें स्पर्शरेषेची पराकाष्ठा आहे. **उदाहरण**:—(आ. १४) यांत Q बिंदू P बिंदूकडे सरकत जाईल, तसा V हा P कडे सरकत जातो. म्हणून OV या व्युत्क्रमज्येची पराकाष्ठा OP हा व्यास आहे. हीच गोष्ट संहितावस्थेंत $OV=OP=2CP$ या भाषेनें लेख ५५ यांत सांगितली आहे.

(५३) आकृति १३ पहा. P या परिधिस्थ बिंदूपासून निघून S या इष्ट बिंदूंतून पार जाणारी **वक्रतादर्शक वर्तुलाची ज्या** PSW, आणि तिची **संमुखी** CR यांचा संबंध काढणें.:—

PWC आणि CPR या दोन त्रिकोणांत PW बाजू RC बाजूला समांतर आहे. आणि PC रेघ या दोहोंना छेदिते, म्हणून युक्लिडची भूमिति

पुस्तक १ लें. सि. २९ प्रमाणें WPC कोन PCR कोनाबरोबर आहे. आणि PWC कोन CPR कोनांबरोबर आहे. (युक्लिड पुस्तक ३ रें, सि. ३२ पहा). म्हणून PWC आणि PCR हे सरूप म्हणजे समरूप त्रिकोण आहेत.

सरूप त्रिकोणांच्या धर्मांप्रमाणें

$$PW : PC :: PC : CR.$$

परंतु संहितावस्थेंत $PC = PQ$ असते. व अंतिमगुणोत्तर सिद्धांताप्रमाणें $RC = RQ$ आहे. ह्या किंमती वरील समीकरणांत मांडल्यानें—

$$PW : PQ = PQ : QR$$

म्हणून संहितावस्थेंत इष्ट बिंदूंतून जाणारी वक्रतादर्शक वर्तुलाची ज्या

$$PW = \frac{PQ^2}{QR} = \frac{\text{वेग}^2}{\text{आकर्षण}} = \frac{(\text{क्षणिककंस})^2}{\text{संमुखी}}$$

याचप्रमाणें (आ. १४ पहा) PZY या वक्रतादर्शक–वर्तुलाचा PY व्यास व त्याची QR' संमुखी, यांचा संबंधदर्शक समीकरण तयार होतें. जेव्हां वक्रतादर्शक वर्तुलाची ज्या, वर्तुलाच्या मध्य बिंदूंतून गेली असते, तेव्हां तिला व्यास हें नांव येतें व तिची QR' ही संमुखी PR स्पर्शरेषेवर लंब असते म्हणून—

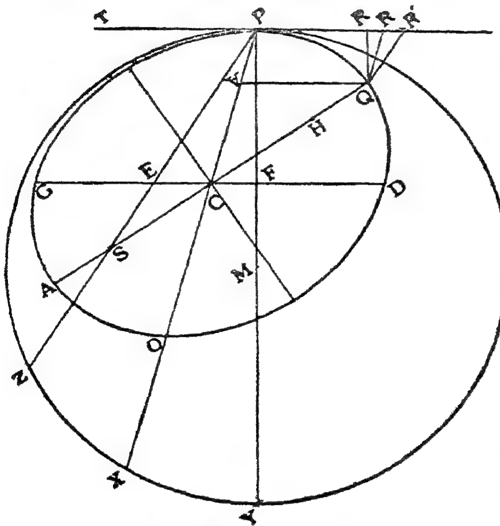
$$\therefore \text{वक्रतादर्शकवर्तुलव्यास} = \frac{\text{क्षणिककंसवर्ग}}{\text{स्पर्शरेषेवर लंबीभूत संमुखी}}$$

$$\text{म्हणजे } PY = \frac{PQ^2}{QR'}$$

प्रकरण ८ वें.

तात्कालिक वर्तुल व शंकुच्छिन्न यांचा परस्पर संबंध.

(५४) आकृति १४ पहा. वक्रतादर्शक वर्तुळ या शब्दाबद्दल तात्कालिक वर्तुळ (*Instantaneous Circle*) हा शब्द या प्रकरणांत आम्हीं योजिला आहे. मागील प्रकरणांत बैंदव पद्धतीनें S या इष्ट बिंदूतून जाणारी तात्कालिक वर्तुल ज्या आणि तिची संमुखी QR'' म्हणजे आकर्षण, यांचा भूमितीय संबंध ठरविला आहे. परंतु आकर्षणाचा उगम S या फोकसांत असतो. फोकसांतून पार जाणाऱ्या ज्येच्या, Z टोकांत तो असत नाहीं. म्हणून शंकुच्छिन्नांतील SP हा मंदकर्ण आणि त्यांतूनच जाणारी PSZ ही तात्कालिक वर्तुलज्या यांचा परस्पर संबंध प्रस्थापित केला म्हणजे, त्याच्या योगें मंदकर्ण व आकर्षण यांचा संबंध ठरवितां येईल. तात्कालिक वर्तुल, भूमितिकृत्याच्या मदतीनें काढणें सुलभ नाहीं. परंतु त्याचा व अभीष्ट शंकुच्छिन्न, यांचा संबंध कळल्यानंतर त्याच्या त्रिज्येची जी लांबी निघेल तिच्या साहाय्यानें तात्कालिक वर्तुल काढतां येतें. परंतु तात्कालिक वर्तुळ काढण्याचा प्रसंगच पडत नाहीं. परावला आकृतीमध्यें तात्कालिक वर्तुळ–ज्या SP या मंदकर्णाच्या चौपट लांब असते. परंतु दीर्घवर्तुळामध्यें असा सरळ संबंध सिद्ध करितां येत नाहीं. तो



(आकृति १४).

युग्मव्यासाच्या मदतीनें ठरवावा लागतो. तो $PSZ = 2C'D^2/AC$ असा असतो, असें पुढें सिद्ध केलें आहे. (पहा लेख ५८, ५७).

(५५) **दीर्घवर्तुलाच्या परिघस्थ P बिंदूपासून** निघून, C या **दीर्घवर्तुल-मध्य-बिंदूतून** पार जाणाऱ्या PCX या तात्कालिकवर्तुल-ज्येची लांबी काढणें.

(आकृति १४ वी पहा)-ADP हें एक दीर्घवर्तुल आहे. SH हे त्याचे दोन फोकस, PT ही स्पर्शरेषा असून तिला GD व्यास समांतर आहे. GD, PO हे युग्म व्यास (*Conjugate diameters*) आहेत. PF रेषा GD वर लंब आहे. QR, QR', QR'' या रेषा अनुक्रमें PF, PC, PS, यांनां समांतर आहेत. V बिंदु CP रेषेंत असून QV ही PT ला समांतर आहे. $ZXYP$ हें एक P येथील वक्रतादर्शक म्हणजे तात्कालिक वर्तुळ आहे. $PFMY$ हा त्याचा व्यास आहे $PCOX, PSZ$ या अनुक्रमें दीर्घ-वर्तुळाचा C मध्य बिंदु आणि त्याचा S फोकस यांतून जाणाऱ्या त्याच्या ज्या आहेत. तात्कालिक म्हणजे ग्रह ज्या क्षणीं P येथें होता, त्या क्षणीं मात्र हें वर्तुळ येथील वक्रता दाखवितें. पुढल्या क्षणीं अत्यंत संन्निध, अशा Q येथें तो येतांच, तेथील वक्रतादर्शक वर्तुळाची त्रिज्या, व्यास, आणि मध्यबिंदु हीं सर्व बदलतात. हें वाचकांनीं लक्षांत ठेवावें. (पहा लेख ४९).

संहितदर्शेत म्हणजे Q बिंदू P बिंदूला लागलेला असतांनां (ले. ४६)

$$PCX = \frac{PQ^2}{QR} = \frac{QV^2}{PV} \quad \ldots \quad (\text{ले. ५३})$$

$$(PV.\ VO) : QV^2 = CP^2 : CD^2 \quad \ldots \quad (\text{दीर्घवर्तुलधर्म})$$

$$\frac{QV^2}{PV.VO} = \frac{CD^2}{CP^2}; \quad \ldots \quad (\text{प्रमाण गणितधर्म})$$

$$\frac{QV^2}{PV^2} = \frac{CD^2}{CP^2}.\ VO; \quad \ldots \quad \text{परंतु संहित दर्शेत}$$

$$VO = PO = 2CP; \quad \ldots \quad (\text{लेख ५२ पहा})$$

$$\therefore \frac{QV^2}{PV^2} = \frac{CD^2}{CP^2}.\ 2\ CP = 2\ \frac{CD^2}{CP};$$

$$\therefore PCX = \frac{PQ^2}{QR} = 2\ \frac{CD^2}{CP};$$

याप्रमाणें दीर्घवर्तुलाच्या P बिंदूतून निघून त्याच्या C मध्यातून पार जाणाऱ्या तात्कालिक वर्तुलज्येची लांबी PCX ही निघाली.

(५६) (आकृति १४) आतां दीर्घवर्तुलाच्या P या बिंदूतून जाणाऱ्या, तात्कालिक वर्तुलाच्या PFY व्यासाची लांबी काढून दाखवितो.

संहितदर्शंत— $PFY = \frac{PQ^2}{QR'} = \frac{PQ^2}{QR \sin QRR'}$; यांपैकीं

$$\frac{PQ^2}{QR} = 2\frac{CD^2}{CP}$$; असें वर सिद्ध केलें आहे

आणि $$Sin\ QRR' = Sin\ PVQ = Sin\ PCD = \frac{PF}{PC};$$

म्हणून $$\frac{PQ^2}{QR'} = 2\frac{CD^2}{CP} \cdot \frac{PC}{PF} = 2\frac{CD^2}{PF};$$

$$\therefore\ PFY = \frac{PQ^2}{QR'} = 2\frac{CD^2}{PF};$$

याप्रमाणें दीर्घवर्तुलाच्या P बिंदूतून निघून जाणाऱ्या तात्कालिक वर्तुलाचा व्यास PFY याची लांबी निघाली.

(५७) आतां **दीर्घवर्तुलाची** P पासून S या **फोकसाकडे जाणारी ज्या** PSZ इची लांबी काढून दाखविणें. संहितदर्शंतः—

$$PSZ = \frac{PQ^2}{QR''} = \frac{PQ^2}{QR' Cosec QR''R'} = \frac{PQ^2}{QR'} Sin\ QR''R'$$

$$Sin\ QR''R' = Sin\ PEF = \frac{PF}{PE};$$ आणि $$\frac{PQ^2}{QR'} = 2\frac{CD^2}{PF};$$

असें पूर्वीं सिद्ध केलें आहे.

$$\frac{PQ^2}{QR''} = 2\ \frac{CD^2}{PF} \cdot \frac{PF}{PE} = 2\ \frac{CD^2}{PE};$$

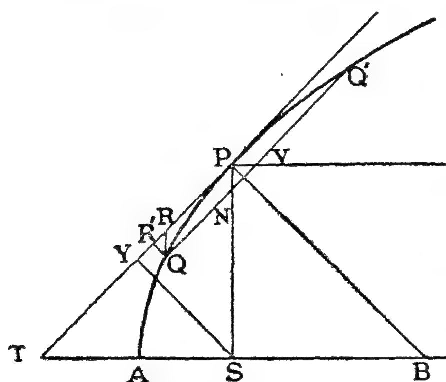
परंतु दीर्घवर्तुळधर्माप्रमाणें $PE = AC$

$$\therefore PSZ = 2\ \frac{CD^2}{AC};$$

याप्रमाणें दीर्घवर्तुळांतील P बिंदूतून निघून S या फोकसांतून पार जाणाऱ्या ज्येची लांबी $2\ \frac{CD^2}{AC}$ निघाली.

(५८) (आकृति १५ पहा). **परावलेच्या** परिधींतील विवक्षित P बिंदूपासून निघून, S या **फोकसांतून** जाणारी, तात्कालिक वर्तुलाची ज्या PSW इची लांबी ठरविणें. (PS ही रेषा खालीं वाढविली तर W येथें ती खालच्या बाजूला मिळते).

येथें $AQPQ'$ हा एक परावलेचा भाग आहे; A हा शिरोबिंदु; S हा फोकस; ASB अक्ष; SP मंदकर्ण; PT स्पर्श-रेषा; PQ कंस; QR रेषा SP ला समांतर आहे. QNQ' रेषा PT ला समांतर; PV रेषा AB ला समांतर; QR', SY या PT वर लंब आहेत. N हा SP व QQ' ज्या यांचा छेदनबिंदु आहे; आकृति वाढूं नये म्हणून PSW ही तात्कालिक वर्तुलाची संपूर्ण ज्या दाखविली नाहीं तरी ती S च्या पुढें PS रेषेच्या तिप्पट लांब आहे असें समजावें.



(आकृति १५)

संहितदर्शंत—

$$PSW = \frac{PQ^2}{QR}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ले० ५३})$$

$$= \frac{QN^2}{PN}; \text{ कारण } PQ = QN;\ QR = PN;$$

$$= \frac{QV^2}{PV}; \text{ कारण संहितदर्शंत } QN = QV$$

आणि $PN = PV$ परावलाधर्म.

$$= 4\,SP;\ \text{कारण} \frac{QV^2}{PV} = 4\,SP \text{ परावलाधर्म.}$$

(५९) **परावलेच्या,** P बिंदूतील तात्कालिक वर्तुलाचा **व्यास काढणें.** हा व्यास आकृतींत दाखविला नाहीं. त्याची लांबी PBX आहे, असें समजा. लेख ५३ पहा.

संहितदर्शेत—

$$PBX = \frac{PQ^2}{QR'} ; = \frac{PQ^2}{QR} \cdot \frac{1}{Sin\ SPY}$$; यांपैकीं

$$\frac{PQ^2}{QR} = 4\ SP$$ आणि $$Sin\ SPY = \frac{SY}{SP}$$;

$$\therefore PBX = \frac{4\ SP \cdot SP}{SY} = 4\ \frac{SP^2}{SY}.$$

प्रकरण ९ वें.

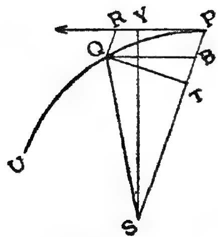
गमनाचें आकर्षण, पतन, क्षेत्र व अंतर.

एतद्विशिष्ट सर्वसाधारण समीकरण.

(General Equation of Motion)

(६०) (आकृति १६ पहा)—एथें P ग्रह S या सूर्याभोंवतीं PQU या कक्षेंत फिरत आहे. असें समजा PR ही तिला स्पर्शरेषा आहे; QB तिला समांतर आहे; QT, SY रेषा अनुक्रमें SP व PR यावर लंब आहेत. QR ही SP ला समांतर आहे.

P ग्रहावर S सूर्याचें आकर्षण नसतें तर तो PR स्पर्शरेषेनें T कालावधींत R एथें आला असता. पण तो P येथून निघतांच त्याच्यावर S च्या आकर्षणाचे हिसके बसूं लागल्यामुळें, तो T कालांत, सूर्याकडे खालीं उतरत PQ या वक्र-मार्गानें, Q येथें येईल. (ले. ३४, आकृ. ६ पहा). T काल अल्प असेल तर, म्हणजे संहितदर्शेत RQ ही PB ला समांतर आणि समान होईल. आणि SP च्या लांबीपुढें PB तुच्छ अथवा उपेक्षणीय होईल. म्हणून अशा स्थितींत $SP—PB=SP$ असें मानितां येईल. (लेख ४७). म्हणून भूमध्याच्या ४००० मैलांच्या दूरत्वा-मुळें, भूपृष्ठाजवळचे पृथ्वीचे हिसके अविकृत मानण्यांत जशी व्यावहारिक चूक होत नाहीं तद्वत SP हें अंतर ९०,०००,००० मैल असल्यामुळें P



(आकृति १६)

च्या आसपास सूर्याचे हिसके अविकृत असतात असें मानणें गैर होणार नाहीं. म्हणून लेख २७ यांतील, खालीं पडणाऱ्या दगडावरील आकर्षणाचा नियम, प्रकृत प्रसंगीं ग्रहास लागू करण्यास हरकत नाहीं.

सद्रहू नियम (*Formula*), $g = 2\ S/t^2$ असा आहे. त्यांत F, QR आणि T असा फेरफार केला म्हणजे सूर्याच्या आकर्षणाचें पुढील सूत्र सिद्ध होतें.

$$F = 2\ \frac{QR}{T^2} \qquad \ldots\ldots \qquad (a)$$

हें समीकरण, ग्रहावरील सूर्याचें आकर्षण F, पतन QR, आणि काल T, एतद्‌ घटित आहे. यांत आकर्षणाच्या अंतराचा संबंध आलेला नाहीं. तो तर अवश्य पाहिजे आहे. म्हणून काल T, क्षेत्र $SP \cdot QT$ व अंतर SP एतद्‌घटित समीकरण उत्पन्न करून, या दोहोंमधून T कालाचा निरास (*Elimination*) केला म्हणजे, इष्ट समीकरण सिद्ध होईल. लेख ४३ प्रमाणें h= एका सेकंदांत ग्रहानें सूर्याभोंवतीं आक्रमलेल्या क्षेत्राची दुप्पट आहे, आणि संहितदशेचा काल = १ सेकंद आहे असें समजा.

इतर दशेंत—

$$T = \frac{2\ PSQ \text{ सेक्टर क्षेत्र}}{h}\ ;$$ { ले. ४०. परंतु संहितदशेंत,

$$2\ PSQ \text{ सेक्टर} = 2\ PSQ \text{ त्रिकोण} = SP \cdot QT = h \ \ldots \qquad (b)$$

$$\therefore\ T = \frac{SP \cdot QT}{h}\ ; \text{ हिचा वर्ग } T^2 = \frac{SP^2 \cdot QT^2}{h^2}\ ;$$

ही T^2 ची किंमत समीकरण (a) यांत मांडून,

$$F = \frac{2\ h^2}{SP^2} \cdot \frac{QR}{QT^2}\ ;$$ हें सर्वसाधारण समीकरण आहे.

म्हणजे हें गमनाचें आकर्षण, पतन, क्षेत्र व अंतर यांनीं घटित आहे. (c)

याचे $$F \cdot SP^2 = 2\ h^2 \cdot \frac{QR}{QT^2}\ ;$$ असेंही रूप होतें. ...... (d)

(६१) वरील समीकरण (d) यावरून असें दिसतें कीं, त्याची दुसरी बाजू स्थिर असेल तर पहिल्या बाजूंतील F आणि SP^2 यांचा गुणाकारही स्थिर असला पाहिजे आणि जेव्हां दोन परिमाणांचा गुणाकार स्थिर असतो, तेव्हां त्यांचें व्यस्त प्रमाण असतें. दुसऱ्या बाजूंत h^2. व

अवयव स्थिर आहे. (पहा प्रकरण ६ वें ले. ४२). फक्त QR/QT^2 हा अवयव, ज्या शंकुच्छिन्नाकृति कक्षांत स्थिर असेल, त्या त्या कक्षांत आकर्षण अंतराच्या व्यस्त प्रमाणांत बदलतें, असें म्हणण्यास हरकत नाहीं. म्हणून पुढील प्रकरणांत दीर्घ वर्तुल, हैपरबला आणि पराबला या आकृतींत पूर्वोक्त QR/QT^2, ह्या अवयवाचें स्थिरत्त्व सिद्ध केलें आहे.

तसेंच QR/QT^2 हा L या ऋज्वीचा व्युत्क्रम आहे, असें पुढें सिद्ध केलें आहे. शंकुच्छिन्नांत फोकसांतून बृहदक्षावर लंब रेषा काढून, ती दोहों बाजूंस कक्षाकृतीपर्यंत वाढविली तर, तिला ऋज्वी (*Latus Rectum*) म्हणतात. वर्तुळांत फोकस, मध्यबिंदूंत असतो, म्हणून $L = 2\ SP$ ही तिची किंमत असून, ती स्थिर असते. आकृति १७ यांत LSM ही रेषा ऋज्वी आहे.

(६२) संहितदर्शेंत Q बिंदु PR रेषेंत असतो. म्हणून SPY, QPT हे काटकोन–त्रिकोण सरूप असतात.

म्हणून सरूप त्रिकोणाच्या धर्माप्रमाणें,

$$QT : PQ :: SY : SP;$$

$$\therefore PQ = \frac{SP \cdot QT}{SY}; \text{ किंवा } PQ \cdot SY = SP \cdot QT$$

वर्ग करून, $\therefore SP^2 \times QT^2 = SY^2 \times PQ^2 \ldots$　　(f)

ही (f) किंमत समीकरण (c) यांत मांडली तर

$$F = \frac{2\ h^2}{SY^2} \cdot \frac{QR}{PQ^2} \quad \text{असें होतें} \qquad (e)$$

टीपः–हें समीकरण पुढें लेख ७२ यांत वेगप्रकरणांत उपयोगी पडतें.



प्रकरण १० वें.

शंकुच्छिन्नकक्षेंत असें सिद्ध करावयाचें कीं

$$\frac{QR}{QT^2} = \text{स्थिरराशि};$$

(६३) **दीर्घवर्तुलकक्षेंत** $QR/QT^2 = AC/2BC^2$ **असें सिद्ध करण्याचें** (आकृति १७ वी पहा).

येथें $AMHL$ ही एक दीर्घ वर्तुलाकार कक्षा आहे. तिच्या S या फोकसांत सूर्य आहे. P येथें ग्रह आहे. Q बिंदु P च्या अत्यंत जवळ आहे. $PVCO$, $GECD$ हे युग्मव्यास आहेत. QR ही SP ला समांतर आहे आणि QX ही रेषा PR या स्पर्शरेषेला आणि GD या युग्मव्यासाला समांतर आहे. LSC, BCH, QTP, PFD हे काटकोन आहेत. LSM रेषेला ऋज्वी असें म्हणतात. QX, GD समांतर रेषा आहेत आणि EP रेषा त्यांना छेदिते. म्हणून QTX, PFE या त्रिकोणांतील QXT कोन, PEF कोनासमान आहे; आणि EFP, XTQ हे कोन काटकोन आहेत म्हणून QTX, PFE हे त्रिकोण सरूप आहेत. म्हणून सरूप त्रिकोणाच्या धर्माप्रमाणें—

(आकृति १७)

$$\frac{QT^2}{QX^2}=\frac{PF^2}{PE^2}=\frac{PF^2}{AC^2}\text{ ; कारण } PE=AC;\ (\text{दी. व. ध.})$$

$$\therefore\ QT^2=\frac{QX^2\cdot PF^2}{AC^2}\ ;$$

पुनः PXV, PEC हे सरूप त्रिकोण आहेत;

$$\therefore\ \frac{PX}{PV}=\frac{PE}{CP}=\frac{AC}{CP}\ ;\quad \text{आणि}\quad \frac{QR}{PV}=\frac{AC}{CP}\ ;$$

कारण $PX=QR$;

$$\therefore\ QR=PV\cdot\frac{AC}{CP}\ ;$$

$$\therefore\ \frac{QR}{QT^2}=\frac{PV\cdot AC}{CP}\cdot\frac{AC^2}{QX^2\cdot PF^2}=\frac{PV\cdot AC^3}{CP\cdot QX^2\cdot PF^2}\ ;$$

परंतु Q हा P शीं संहित असतां $QX=QV$.

$$\therefore\ \frac{QR}{QT^2}=\frac{PV}{QV^2}\cdot\frac{AC^3}{CP\cdot PF^2}\quad \cdots\quad \cdots\quad (a)$$

परंतु दीर्घ वर्तुल धर्माप्रमाणें—

$$(PV \cdot VO) : QV^2 : : CP^2 : CD^2;$$

$$\therefore \frac{PV \cdot VO}{QV^2} = \frac{CP^2}{CD^2} \text{ ; अथवा } \frac{PV}{QV^2} = \frac{CP^2}{CD^2 \cdot VO} :$$

परंतु संहितदर्शेत $VO = 2\,CP$; लेख ५२.

$$\therefore \frac{PV}{QV^2} = \frac{CP^2}{CD^2 \cdot 2\,CP} = \frac{CP}{2\,CD^2}$$

हा मध्यबिंदूंतून जाणारी जी तात्कालिक वर्तुलज्या. PCO तिचा, व्युत्क्रम आहे. (पहा लेख ५५). हा समी. (a) यांत मांड.

$$\therefore \frac{QR}{QT^2} = \frac{CP}{2\,CD^2} \cdot \frac{AC^3}{CP \cdot PF^2} = \frac{AC^3}{2\,CD^2 \cdot PF^2}.$$

परंतु $CD \cdot PF = AC \cdot BC$; दी. व. धर्माप्रमाणें.

$$\therefore \frac{QR}{QT^2} = \frac{AC^3}{2\,AC^2 \cdot BC^2} = \frac{AC}{2\,BC^2} = \frac{1}{L} \text{ ; स्थिर.}$$

ज्या अर्थी दीर्घवर्तुळांत AC, BC व्यास स्थिर असतात. त्यापक्षीं L ही ऋज्वी ही स्थिर असली पाहिजे. या ऋज्वीला *Latus Rectum* असें म्हणतात.

(आकृति १७ अ)

दीर्घ वर्तुळांत $2\, BC^2 / AC$ ही LSM या ऋज्वीची किंमत असते. आणि ज्या अर्थीं AC, BC हीं व्यासार्धें स्थिर असतात, त्या अर्थीं ही ऋज्वीही **स्थिर** असते. ही ऋज्वी (*Latus Rectum*) L या अक्षरानें दर्शवितात.

$$\therefore \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L} = \text{स्थिरांक}$$

टीपः—हैपरबलाकृति कक्षेंत QR / QT^2 यांची किंमत आणण्याची रीति हुबेहूब वरीलप्रमाणेंच आहे, आणि फलनिष्पत्तीही वरीलप्रमाणेंच होतें. म्हणजे $QR / QT^2 = \frac{1}{L}$; आकृति (१७ अ) पहा.

परावला

(६४) परावलाकृति कक्षेंत $QR / QT^2 = 1 \div 4AS =$ स्थिरांक असें सिद्ध करण्याचें. आकृति १८ वी पहा.

वरील आकृतींत PQA हा परावलेचा एक भाग आहे. S हा तिचा फोकस. P हें विवक्षित कालीं ग्रहांचें स्थान, Q हा P चा अत्यंत सन्निध बिंदु; PRY ही स्पर्शरेषा; QR ही SP शीं समांतर; $QXVQ'$ ही ज्या, PR शीं समांतर; QT ही SP वर लंब; आणि SY ही PRY वर लंब आहे; आणि, PV ही AS ला समांतर; A हा परावलेचा शिरोबिंदु; आणि SAY हा काटकोन आहे.

(आकृति १८)

$QR = PX$; PQ हा समांतरभुज चौकोन आहे म्हणून.
$PX = PV$; (परावला धर्म); म्हणून $QR = PV$.
$QV^2 = 4SP.\, PV$; परावला धर्म;

$$\text{म्हणून}\dots\ PV = \frac{QV^2}{4SP}$$

परंतु संहितदशेंत $QV = QX$;

$$\therefore\ PV = \frac{QX^2}{4SP};\ \text{परंतु}\ PV = QR;$$

$\therefore\ QR = \frac{QX^2}{4SP}$; याच्या प्रत्येक बाजूला QT^2 नें भागून

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{4SP} \cdot \frac{QX^2}{QT^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (b)$$

संहितावस्थेंत देखील PYS, QTX हे सरूप त्रिकोण असतात.

$$\therefore\ \frac{QX}{QT} = \frac{SP}{SY}; \qquad \therefore\ \frac{QX^2}{QT^2} = \frac{SP^2}{SY^2};$$

ही किंमत वरील (b) समीकरणांत मांडून,

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{4SP} \cdot \frac{SP^2}{SY^2} = \frac{SP}{4SY^2}; \quad \ldots \quad \ldots \quad (c)$$

परंतु परावलेच्या धर्माप्रमाणें SAY, SYP हे सरूप त्रिकोण आहेत.

$\therefore\ AS : SY :: SY : SP$

$\therefore\ SY^2 = AS \cdot SP$ ही किंमत वरील C समीकरणांत मांडून,

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{SP}{4AS \cdot SP} = \frac{1}{4AS};$$

परावलेंत $4AS$ ही ऋज्वीची किंमत असते. आणि AS हें शिरोबिंदु व फोकस, यांच्यामधील अंतर स्थिर असल्यामुळें, ही ऋज्वीची किंमत $4AS$ ही स्थिर असते. म्हणून परावलेंत

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L} = \text{स्थिरांक.}$$

प्रकरण ११ वें.

शंकुच्छिन्नाकृतिकक्षेंत आकर्षण अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असतें.

(६५) मागील प्रकरणांत दीर्घ वर्तुळ, हैपरबला, परावला या शंकुच्छिन्नाकृति कक्षांत $\frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L} =$ स्थिरांक, असें सिद्ध केलें आहे. ही किंमत ६० व्या लेखांतील (d) या समीकरणांत मांडली तर—

$$F \cdot SP^2 = \frac{2\,h^2}{L}$$ असें सिद्ध होतें;

यांत $2\,h^2 / L$ ही दुसरी बाजू (पक्ष) स्थिर आहे, (पहा ले.४३,६३, ६४). म्हणून F हें आकर्षण, SP^2 या अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असतें, असें सिद्ध झालें (लेख ६१).

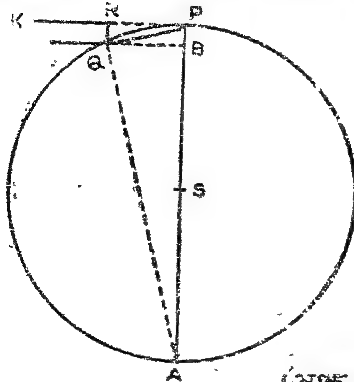
(६६) ज्या भूनिष्ट, गुरुत्वाकर्षणामुळें कोणताहि पदार्थ किंवा पाषाण, अंतरिक्षांतून भूपृष्ठावर पडतो, त्याच गुरुत्वाकर्षणामुळें चंद्र पृथ्वीसभोंवतीं सर्वकाल फिरत असेल, तर पाषाण व चंद्र यांच्या पतनांवरून, हा गुरुत्वाकर्षणनियम प्रकारांतरानें सिद्ध झाला पाहिजे. आणि तसें होईल तर दुधांत साखर पडल्यासारखें होईल असें वाटून, **न्यूटननें** त्या कालच्या भूपरिधीच्या मोजणीवरून ठरविलेल्या, पृथ्वी व चंद्र यांच्यामधील अंतराच्या सहाय्यानें, गणित करून पाहिलें. परंतु त्यांच्या पतनांत पूर्वोक्त आकर्षणाच्या नियमाची सूक्ष्म प्रतीति येईना, त्यामुळें तो मनांत फारच खजिल झाला. त्याच्यावेळीं पृथ्वीच्या परिधीच्या एका अंशाची लांबी ६० मैल मानीत असत. हेंच त्या पतनांत मेळ न पडण्याचें मुख्य कारण होतें.

पुढें १५ वर्षांनीं **फ्रान्स** देशांत **पिकार्ड** या ज्योतिष्यानें फार जपून मोजणी केल्यामुळें भूपरिधीच्या एका अंशाची लांबी ७० मैल आहे असें फ्रान्स देशांत ठरलें. या नवीन शोधाचा उपयोग करून, जेव्हां न्यूटन पतनाचें गणित करूं लागला व त्यावरून पूर्ण मेळ पडण्याचीं चिन्हें दिसूं लागलीं, व आपल्या श्रमाचें साफल्य अगदीं जवळ येतें आहे असें त्यानें पाहिलें, तेव्हां असें सांगतात कीं, त्याचा कंठ आनंदानें व गहिंवरानें दाटून आला आणि त्याच्यानें कांहीं वेळ बोलवेनासें झालें.

(६७) पूर्वोक्तवत् **न्यूटननें** अतुळ बुद्धिसामर्थ्यानें ठरविलेल्या **आकर्षणाच्या नियमाचा प्रत्यंतर पुरावा**—प्रथम चंद्रकक्षेच्या व्यासाची व परिघाची फुटात्मक लांबी काढली पाहिजे. पृथ्वीचा परिघ ३६०° अंश मानिला तर, तिची त्रिज्या ५७·३ अंश भरते. पिकार्डच्या सूक्ष्म मोजणीप्रमाणें दर अंशाची लांबी ७० मैल मानिली तर, ५७·३ × ७० = ४००० मैल ही भूत्रिज्येची लांबी झाली. भूत्रिज्येच्या ६० पट चंद्रकक्षेची त्रिज्या आहे. म्हणून २४०००० मैल ही चंद्रकक्षेच्या त्रिज्येची लांबी झाली. हिला ५२८० नीं गुणून गुणाकार १२६७२०००००० हे तिचे फुट झाले.

यावरून चंद्रकक्षेचा व्यास २५३४४००००० फुट आहे, व परिधि ७९६५२५७००० फुट आहे असें सिद्ध होतें.

चंद्राचा प्रदक्षिणाकाल २७·३२ दिवस आहे; याचे २३६०४४८ सेकंद होतात. यांनीं चंद्रकक्षेच्या परिधीच्या फुट संख्येला भागिलें म्हणजे भागाकार ३३३२ फुट ही चंद्राची एका सेकंदांतील गति होते.



(आकृ. ६)

(आकृति ६ वी पहा.) येथें S ही पृथ्वी, P हा चंद्र, $PQ =$ ३३३२ फुट ही चंद्राची एका सेकंदांतील गति, $AP =$ २५३४४००००० फुट, हा कक्षा व्यास; PB हें चंद्राचें एका सेकंदांतील पतन; अशीं मानें आहेत. हीं मानें ले. ३४ यांतील पतनाच्या समीकरणांत मांडून, पतनाची किंमत काढितां येते. जसें कंसवर्ग। व्यास = पतन;

$$\frac{३३३२^{२}}{२५३४४००००००} = ०\cdot००४४४४$$

म्हणजे पृथ्वीच्या आकर्षणामुळें चंद्र पहिल्या सेकंदांत $PB =$ ०·००४४४४ फुट खालीं उतरतो. पतन हें पहिल्या सेकंदांत आकर्षणाच्या निमें असतें. (लेख ३४) म्हणून तें आकर्षणाच्या नियमाप्रमाणें अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत बदललें पाहिजे, म्हणून चंद्राच्या पतनापेक्षां भूपृष्ठावरील पदार्थाचें पतन ६० × ६० = ३६०० पट जास्त असलें पाहिजे, अर्थात् पहिल्या सेकंदांत ·००४४४४ फुट × ३६०० = १६ फुट पतन. हें चंद्राच्या गतीवरून ठरविलेलें पतन ले. २३ यांतील प्रयोगसिद्ध पतनाशीं तंतोतंत जमतें. म्हणून **न्यूटननें** शोधून काढलेला आकर्षणाचा नियम **सत्य** आहे, ही गोष्ट प्रत्यक्षप्रमाणानें सिद्ध झाली.

(६८) केप्लरच्या ग्रहगतिविषयक तीन नियमांची उपपत्तिः— हे तीन नियम १ ल्या प्रकरणाच्या आरंभीं दिले आहेत ते पहावे. ग्रहांवरील सूर्याचें आकर्षण, सूर्यापासून त्यांच्या अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असतें, हा जो नियम **न्यूटननें** सिद्ध केला तो दीर्घवर्तुल,

हैपरबला, आणि पराबला या तीनही प्रकारच्या शंकुच्छिन्नाकृति कक्षांना लागू आहे. शेवटल्या दोन आकृतींचे फांटे कधींही एकमेकांस लागत नाहींत म्हणून, त्यांमध्यें फिरणाऱ्या पदार्थाची पूर्ण प्रदक्षिणा होणें शक्य नाहीं. धूमकेतु हे बहुशः सूर्याला वळसा घालून गेल्यावर, पुनः परत येत नाहींत, म्हणून ते पराबला किंवा हैपरबला अशा प्रकारच्या कक्षांत फिरत असले पाहिजेत. परंतु ग्रहांची गोष्ट अशी नाहीं. सूर्याभोंवतीं त्यांच्या हजारों पूर्ण प्रदक्षिणा झालेल्या पहाण्यांत आल्या आहेत. म्हणून त्यांच्या कक्षा दीर्घवर्तुळाकार असल्या पाहिजेत. वर्तुळ हा दीर्घवर्तुळाचाच एक विशेष प्रकार आहे. वर्तुळ म्हणजे दोनही फोकस एके जागीं असणारें दीर्घ वर्तुळ असें म्हणतां येतें. ज्याअर्थीं आकर्षणाच्या नियमांतील अंतराचा प्रारंभ फोकसापासून होतो, त्याअर्थीं ग्रहांस ओढून धरणारा **सूर्य त्यांच्या कक्षांच्या एका फोकसांत असला पाहिजे हें उघड आहे. ही केप्लरच्या** पाहिल्या नियमाची उपपत्ति झाली.

केप्लरच्या दुसऱ्या नियमाची उपपत्ति ६ व्या प्रकरणांत दिलीच आहे; तिचा आकर्षणाच्या नियमाशीं कांहीं संबंध नाहीं. फक्त आकर्षणाचा रोख नेहमीं सूर्याकडे असला म्हणजे झालें. (लेख ४२ पहा.)

आतां तिसऱ्या नियमाची उपपत्ति देणें शिल्लक राहिलें तें पुढील लेखांत पहावें.

(६९) केप्लरचा ३ रा नियम, फक्त दीर्घवर्तुल कक्षांना मात्र लागू आहे म्हणून तेवढ्यापुरताच विचार केला म्हणजे झालें.

दीर्घ वर्तुळांत—

$F \cdot SP^2 = \mu$; लेख ३७ पहा. $L = 2\,BC^2/AC$; ले. ६३ आणि ले. ६५, यांत $F \cdot SP^2 = 2\,h^2/L$ असें सिद्ध केलें आहे म्हणून—

$$\frac{2h^2}{L} = \mu; \quad \therefore 2h^2 = \mu L; \quad L = \frac{2h^2}{\mu} \quad \ldots \quad (१)$$

$$2h^2 = \mu\,\frac{2BC^2}{AC}; \quad h^2 = \mu\,\frac{BC^2}{AC}; \quad \ldots \quad \ldots \quad (२)$$

(७०) इच्छिल्या ग्रहाच्या प्रदक्षिणा कालाचे दिवस $= P$; आणि एका दिवसांत त्याच्या मंदकर्णानें लोटलेल्या क्षेत्रफळाची दुप्पट $= h$; आणि बृहदक्षार्ध $= AC$; लघ्वक्षार्ध $= BC$; असें मानिलें तर

$$P = \frac{\text{दीर्घ वर्तुळ कक्षेचें द्विगुण क्षेत्रफल}}{h};$$

$$= \frac{2\,\pi \cdot AC \cdot BC}{h}$$

$$P^2 = \frac{4\,\pi^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2}{h^2};\ \text{परंतु}\ h^2 = \mu\,\frac{BC^2}{AC};\ \text{समी २}$$

$$P^2 = \frac{4\,\pi^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2}{\mu \cdot BC^2} \cdot AC;$$

$$P^2 = \frac{4\,\pi^2}{\mu} \cdot AC^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (a)$$

P_1 आणि AC_1 हीं दुसऱ्या एका ग्रहाचें अनुक्रमें प्रदक्षिणा काल, आणि मध्यमांतर असतील तर वरील रीतीनें—

$$P_1^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} \cdot AC_1^3\ \text{असें सिद्ध होईल.} \quad \ldots \qquad (b)$$

(a) समीकरणाला (b) समीकरणानें भागून,

$$\frac{P^2}{P_1^2} = \frac{AC^3}{AC_1^3} \cdot\ \text{अथवा}\ \frac{P^2}{AC^3} = \frac{P_1^2}{AC_1^3} \cdot \quad \ldots \qquad (c)$$

म्हणजे आकर्षण, अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असेल तर कोणत्याही दोन ग्रहांच्या प्रदक्षिणाकालाच्या वर्गांत जें गुणोत्तर असतें, तेंच गुणोत्तर सूर्यापासून जीं त्यांचीं मध्यमांतरें, त्यांच्या घनामध्यें असतें असें वरील उपपत्तीवरून सिद्ध होतें. त्याचप्रमाणें कोणत्याही ग्रहाच्या प्रदक्षिणाकालाच्या वर्गाला, त्याच्याच मध्यमांतराच्या घनानें भागून, येणारा भागाकार, सर्व ग्रहांच्या संबंधानें समान असतो, हेंही सिद्ध होतें. लेख ३६ पहा. वर जें आम्हीं सूर्याभोंवतीं फिरणाऱ्या दोन ग्रहांचे प्रदक्षिणाकाल, व व त्यांचीं मध्यमांतरें यांचा संबंधदर्शक समीकरण सिद्ध केलें आहे, तें सूर्य स्थिर आहे अशा भावनेच्या आधारावर केलें आहे. परंतु द्रव्याच्या **प्रेरणाशरणत्वामुळें** (लेख १५,३८) जसे ग्रह सूर्याकडे ओढले जातात तसा सूर्यही ग्रहांकडे ओढला जातो. म्हणून सूर्याला स्थिर करण्यासाठीं इष्ट ग्रहाच्या द्रव्याइतकें द्रव्य ग्रहांतून वजा करून, तें सूर्याच्या μ द्रव्यांत मिळविलें पाहिजे. लेख ३८ वरून सिद्ध होतें कीं, सूर्य व पृथ्वी यांचीं द्रव्यें ७१२८००००:२२४ या प्रमाणांत किंवा ३२००००:१ या

प्रमाणांत आहेत. सूर्य व पृथ्वी यांच्या विरूद्ध आकर्षणामुळें, त्याच्या आकर्षणाच्या बेरजेइतकें त्यांच्यामधील अंतर कमी होतें. म्हणून पृथ्वीचें द्रव्य शून्य मानून, सूर्याचें द्रव्य ३२०००१ इतकें मानिलें तरी परिणाम सारखाच. या दृष्टीनें गुरु शन्यादि इतर ग्रहांचीं द्रव्यें सूर्यद्रव्यांत मिळविलीं पाहिजेत. पृथ्वी बुध यांचीं द्रव्यें सूर्यद्रव्यापुढें "दर्यामें खसखस" प्रमाणें क्षुल्लक आहेत, म्हणून त्यांची उपेक्षा केली तरी चालेल. परंतु गुरूचें द्रव्य, सूर्याच्या द्रव्याच्या सहस्रावा हिसा असल्यामुळें, त्याची उपेक्षा करणें योग्य होत नाहीं, म्हणून लेख ७० यांतील (a), (b) समीकरणें अशीं असलीं पाहिजेत. जर M व M_1 हीं अनुक्रमें पृथ्वी व गुरु यांचीं द्रव्यें मानिलीं तर

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{\mu+M}\cdot AC^3 \cdot \text{ हें पृथ्वीचें समीकरण } \ldots \quad (a')$$

$$P_1^2 = \frac{4\pi^2}{\mu+M_1}\cdot AC_1^3 \text{ हें गुरूचें समीकरण } \ldots \quad (b')$$

(a') ला (b') नें भागून

$$\frac{P^2}{P_1^2} = \frac{\mu+M_1}{\mu+M}\cdot\frac{AC^3}{AC_1^3}$$

अथवा

$$\frac{AC^3}{AC_1^3} = \frac{P^2}{P_1^2}\cdot\frac{\mu+M}{\mu+M_1};$$

हें केप्लरच्या ३ ऱ्या नियमाचें निर्दोष समीकरण सिद्ध झालें. मराठी ग्रहगणित पृष्ठ १०४ यांत दिलेलें समीकरण पहा. त्यांत वरील फेरफार केला तरच गुरु याचे खरे आंकडे येतात असें दाखविलें आहे.

प्रकरण १२ वें.

शंकुच्छिन्नकक्षेंतील वेग.

(७१) आकर्षण अंतराच्या वर्गाच्या उलट प्रमाणांत असतें हा नियम सर्व शंकुच्छिन्नकक्षांत सारखाच दृष्टीस पडतो. परंतु वेगाची गोष्ट अशी नाहीं. वेग कक्षेच्या आकृतीवर अवलंबून असतो. किंबहुना वेगावरच

कक्षाकृति अवलंबन असते, असें म्हणणें जास्त वास्तविक आहे. याचा अनुभव पुढील विवेचनावरून येईल. वेग दोन प्रकारचे आहेत. पहिला **रेखीय वेग** (*Linear Velocitly*); दुसरा **कोणीय वेग** (*Angular Velocity*).

(**७२**) लेख ६२ यांतील समीकरण (e) आणि ले. ५३ यांतील इष्टबिंदु S या फोकसांतून जाणाऱ्या ज्येचें समीकरण हीं घे.

ले. ६२ समी (e), $F = \frac{2h^2}{SY^2} \cdot \frac{QR}{PQ^2}$
ले. ५३. फोकसज्या $PW = \frac{PQ^2}{QR}$;
} या दोहोंमधून QR/PQ^2 याच्या निरसनार्थ

ले. ७३, टीपेप्रमाणें $F = \frac{2h^2}{SY^2} \cdot \frac{QR}{PQ^2} \cdot \frac{PQ^2}{QR} \cdot \frac{1}{PW}$,

(१) $$F = \frac{2h^2}{SY^2 \cdot PW};$$

(**७३**) आतां वेगाचीं समीकरणें सिद्ध करण्याचें. Q बिंदू P शीं संहित असतेवेळीं म्हणजे जेव्हां, PQ बैंदव रेषा असते, तेव्हां तिला वेग हें नांव येतें. वेगाला V ही संज्ञा दिली तर, $PQ = V$ असें होतें. आणि लेख ६२ यांतील $PQ = SP.\ QT/Sy$ या (f) समीकरणांत हा फेरफार केला तर,

$V = \frac{SP \cdot QT}{Sy} = \frac{h}{Sy}$; संहितदर्शेंत; लेख ६० समी. (b) पहा.

(२) $$V^2 = \frac{h^2}{Sy^2};$$

पुनः पुढील टीपेप्रमाणें समी. (१) व (२) यामधून h^2 याचें निरसन करण्यासाठीं—

$$F = \frac{2h^2}{Sy^2 \cdot PW} \cdot \frac{V^2\ Sy^2}{h^2} = \frac{2V^2}{PW},$$ यापासून

(३) $\therefore V^2 = \frac{1}{2}\ F \cdot PW$; हें सिद्ध होतें. येथें PW ही फोकसांतून जाणारी ज्या आहे.

टीप– कोणत्याही राशीला, कोणत्यातरी समीकरणाच्या एका पक्षानें गुणून, त्याच्याच दुसऱ्या पक्षानें भागिलें तर, किंवा एका पक्षानें प्रथम भागून, नंतर दुसऱ्या पक्षानें गुणिलें तर, समीकरण न बिघडतां, अंशच्छेदांतील समान पदें, संक्षेप देऊन नाहींशीं करिता येतात. या कृतीला **निरास** किंवा **निरसन** (*Elimination*) म्हणतात. अनुभवानें या कामीं पटुता संपादिता येते.

लेख २७ समी. (४) यामध्यें $v^2 = 2g\,S$ असें सिद्ध केलें आहे. त्यांत g हें पृथ्वीचें आकर्षण आहे. त्याच्या जागीं F हें सूर्याचें आकर्षण घातलें तर आणि v बद्दल V संज्ञा दिली तर ग्रहाचे वेग आकर्षण, आणि पतन एतद्घटित समीकरण सिद्ध होतें.

(४) $V^2 = 2\,F \cdot S;$

ले. २७, समीकरणें (३) आणि (४) यांत V^2 च्या दोन निराळ्या स्वरूपाच्या किंमती सिद्ध केल्या आहेत. त्याच्या समीकरणापासून ग्रहांचें पतन (सूर्याकडे अभिगमन) आणि सूर्यमध्यांतून जाणारी तात्कालिक वर्तुलाची ज्या, यांचा संबंध निघतो. जसें—

$$\frac{1}{2} \cdot F \cdot PW = 2\,F \cdot S;$$

(५) $\therefore S = \frac{1}{4}\,PW \cdot$

म्हणजे पतन, फोकसांतून जाणाऱ्या तात्कालिक वर्तुल कक्षेच्या ज्यच्या चतुर्थांश असतें हें सिद्ध.

(७४) वर सिद्ध केललीं समीकरणें (२), (३), (४) आणि (५) हीं, तात्कालिक वर्तुलांत ग्रह फिरतो, अशा भावनेचीं आहेत. परंतु वस्तुतः ग्रह शंकुच्छिन्नांत फिरतात. यास्तव शंकुच्छिन्नाच्या दीर्घवर्तुलादि आकृतिपरत्वें वेगाचीं समीकरणें, त्यांच्या साहाय्यानें सिद्ध केलीं पाहिजेत.

पुढील समीकरणांत μ / SP^2 म्हणजे सूर्याचें ग्रहावरील तात्कालिक आकर्षण, (लेख ३७ पहा.) आणि PW ही ग्रहकक्षेच्या तात्कालिक वर्तुलाची, सूर्य असणाऱ्या फोकसांतून पार जाणारी ज्या आहे हें ध्यानांत ठेवावें (आकृति १४). μ ची किंमत ·०००२९५८४ असते. (लेख ३७ पहा.)

$V^2 = \frac{1}{2}\,F \cdot PW\,;$ ले. ७३; समीकरण (३)

$F = \mu \,/\, SP^2\,;$ लेख (३७)

समीकरण (३) यांत F च्या किंमतीचा **विन्यास** (*Substitution*) केला तर—

$$V^2 = \frac{\mu}{SP^2} \cdot \frac{PW}{2}\,; \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (६)$$

या समीकरणांतील $PW/2$ याची किंमत शंकुच्छिन्नाकृतींतील SP, AC, या अनुक्रमें स्पष्ट व मध्यम मंदकर्णाच्या रूपानें व्यक्त केली पाहिजे.

दीर्घवर्तुलांत—

$$\frac{PW}{2} = \frac{CD^2}{AC}$$; लेख ५७; यांतील PSZ म्हणजे PW समजावें.

$$= \frac{SP \cdot HP}{AC}$$; दीर्घवर्तुलधर्माप्रमाणें,

$$= \frac{SP(2AC - SP)}{AC};$$

$$= SP\left(2 - \frac{SP}{AC}\right);$$

– याचप्रमाणें हैपरबलेंत

$$\frac{PW}{2} = SP\left(2 + \frac{SP}{AC}\right);$$

– पराबलेंत

$$\frac{PW}{2} = SP(2);$$ लेख ५८;

– वर्तुलांत

$$\frac{PW}{2} = SP;$$ लेख ३४;

याप्रमाणें आलेल्या, $PW/2$ या फोकसांतून जाणाऱ्या, तात्कालिक वर्तुल ज्यार्धांच्या किंमती, समीकरण (६) यांत मांडून दोनही पक्षाचें वर्गमूळ काढिलें तर त्या त्या शंकुच्छिन्नाकृति कक्षांतील वेगांचीं समीकरणें उत्पन्न होतात, जसें—

दीर्घवर्तुळांतील वेग $V = \sqrt{\frac{\mu}{SP}\left(2 - \frac{SP}{AC}\right)}$

हैपरबलेंतील वेग $V = \sqrt{\frac{\mu}{SP}\left(2 + \frac{SP}{AC}\right)}$

पराबलेंतील वेग $V = \sqrt{\frac{\mu}{SP}\left(2 + \frac{SP}{\infty}\right)}$

वर्तुळांतील वेग $V = \sqrt{\frac{\mu}{SP}}$

उदाहरण-कोणे एके क्षणीं मंगळाचा स्पष्टमंदकर्ण $SP=$ १·६३७४; मध्यममंदकर्ण $AC=$ १·५२२९ आहे. तर त्या वेळीं त्याची एका दिवसाची गति किती भरेल ? $\mu=$ ·०००२९६. (लेख ९१ पहा.)

$$V=\sqrt{\frac{\cdot000२९६}{१\cdot६३७४}\left(२-\frac{१\cdot६३७४}{१\cdot५२२९}\right)}$$

= ·०१२९२६ ; याला ९ कोटि मैलांनीं गुणून

= ११६३३४० मैल, ही दिनगति झाली.

(७५) वर्तुळांतील वेगाला मूलमान समजून, तद्दितर शंकुच्छिन्नाकृतींतील वेगांना, त्यांना भागून येणारीं गुणोत्तरें पुढें दिलीं आहेत. वर्तुळांतील वेगापेक्षां

दीर्घवर्तुळांतील वेग, $\sqrt{(2-SP/AC)}$ पट असतो.

हैपरबलेंतील वेग, $\sqrt{(2+SP/AC)}$ पट असतो.

पराबलेंतील वेग, $\sqrt{(2)}$ पट $=1\cdot414$ पट असतो.

वरील गुणोत्तरावरून असें सिद्ध होतें कीं पराबलेंतील वेग, वर्तुलांतील वेगाच्या १·४१४ पट असतो. दीर्घवर्तुलांतील वेग याच्याही पेक्षां कमी असतो. आणि हैपरबलेंतलि वेग पराबलेंतील वेगापेक्षां जास्त असतो. वर्तुलांतील वेग म्हणजे, SP इतक्या अंतरावर तोच ग्रह, वर्तुलकक्षेंत फिरत असता तर, त्याच्या अंगीं असणारा वेग.

(७६) ग्रहांच्या कक्षांचा आकार-वरील विवेचनावरून असें सिद्ध होतें कीं, कक्षेचा आकार ग्रहांच्या रेखीय वेगावर अवलंबून असतो. ग्रहांच्या कक्षेच्या आकारांत फेरफार करणें, त्याच्या कक्षेच्या केंद्रच्युतीत फरक पाडणें, सूर्याला शक्य नाहीं. हें काम ग्रह परस्परांस ओढून करीत असतात. दीर्घवर्तुळांत जेथें* $SP=AC$ असते, म्हणजे जेथें स्पष्ट मंदकर्ण मध्यम मंदकर्णा येव्हढा असतो. तेथें वेग $\sqrt{(२-१)}=१$ म्हणजे वर्तुळांतील वेगासमान होतो. नीचापाशीं तो वर्तुलांतील वेगापेक्षां अधिक आणि उच्चापाशीं कमी असतो.

धूमकेतूंचा वेग प्रायः वर्तुळांतील वेगाच्या १·४१४ पट असतो. म्हणून त्यांच्या कक्षा पराबलाकार असतात. याही पेक्षां जास्त वेगाचे

* या ठिकाणीं मंदफल परम असतें व गति मध्यम असते. वर्तुळांतलि वेग म्हणजे मध्यगति.

धूमकेतु हैपरबलांत फिरतात. परंतु असे धूमकेतु फारच कमी. धूमकेतु हे सूर्य संस्थेच्या बाहेर अत्यंत दूर अशा, स्वर्लोकांत वास करणारे, विरळ पदार्थ आहेत. सूर्य आपल्या ग्रहांच्या लटांबरासह विश्वांतून भ्रमण करीत असतां त्याच्या आकर्षणाच्या टप्पांत, एकादा धूमकेतु आला तर, त्यावेळीं दोघांची परस्पर सापेक्ष गति, प्रायः शून्य असल्यामुळें, तो धूमकेतु वरून खालीं पडणाऱ्या दगडाप्रमाणें, जवळ जवळ सरळ रेषारूप मार्गानें सूर्याकडे येऊं लागतो. पुढें सापेक्ष गतीच्या ऱ्हास वृद्धीमुळें, त्याच्या मार्गाची वक्रता वाढूं लागते, त्यामुळें सूर्याला वळसा घालून तो पूर्ववत् सरळ रेषेनें स्वर्लोकाप्रत गमन करतो.

परंतु नशीबानें कोणासही सोडिलें नाहीं. हे स्वच्छंदी **नारदमुनि** सूर्याच्या भेटीला जात असतां किंवा भेट घेऊन परत जात असतां दैववशात् जर कां देवगुरु, किंवा शनि महाराज, त्यांच्या वाटेवर आले असले तर, त्यांच्या आग्रहाच्या पाहुणचारांत त्यांनां कांहीं काळ घालविणें भाग पडतें. मात्र या भिडेमुळें त्यांनां आपल्या स्वधर्माला निरंतर मुकावें लागतें. सारांश गुरु शनिसारख्या बड्या ग्रहांच्या आकर्षणामुळें धूमकेतूंचा वेग कमी होऊन त्यांच्या कक्षेचा आकार जो पूर्वीं पराबलेसारखा असतो तो बदलून दीर्घवर्तुलाकार होतो. यामुळें त्यांचें स्वातंत्र्य नष्ट होऊन त्याला निरंतर सूर्याची परिचर्या करावी लागते.

दुसरा दृष्टांत–जंगली हत्ती पकडण्याच्या कामीं जशी शिकलेल्या पाळीव हत्तींची मदत घ्यावी लागते, तद्वत् धूमकेतु पकडण्याच्या कामीं, सूर्याला गुरु शनि यासारख्या पाळीव हत्तींची मदत घ्यावी लागते. एरवीं त्याला एकट्याला, हें काम मुळींच साधत नाहीं. या धूमकेतुरूपी जंगली हत्तींनां, पूर्वीं कधींही ताबेदारीचा अनुभव नसल्यामुळें, ते झुरणीस लागतात आणि वर्षानुवर्ष रोड होत होत आपला देह ठेऊन ते सूर्य आणि ग्रह यांची धन करितात.

सांप्रत सूर्याभोंवतीं दीर्घवर्तुलांत फिरणारें, सुमारें २० धूमकेतु हयात आहेत. ते बहुतेक शनि गुरुनीं धरून दिलेलें असावें. कारण यांपैकीं बहुतेक धूमकेतूंचीं उच्चें गुरुच्या कक्षेला जवळ आहेत. दोन तीन धूमकेतूंचीं उच्चें, शनीच्या कक्षेला जवळ आहेत. इसवी सन १९१० मध्यें जो **हॉलेचा** प्रचंड धूमकेतु येऊन गेला, त्याचें उच्च इन्द्रकक्षेला जवळ असल्यामुळें, त्याला प्रायः इन्द्रानें पूर्व युगांत धरून दिलें असावें.

काहीं धूमकेतूंचीं उच्चें हालेच्या उच्चापेक्षांही बरींच दूर आहेत. अशा धूमकेतूंना धरून देणारा एकादा बलाढ्य ग्रह इन्द्रकक्षेच्याही पलीकडे आहे कीं काय, या प्रश्नाचा विचार काहीं पटाईत ज्योतिर्विदांनीं चालविला आहे. परंतु त्यांच्या प्रयत्नाला अद्यापि यावें तसें यश आलेलें नाहीं.

हल्लीं जे धुमकेतु सूर्याभोंवतीं दीर्घ वर्तुलाकार कक्षेंत फिरत आहेत, ते ग्रहांनीं धरून दिलेले असावेत, या कल्पनेस साधक असें बलवत्तर प्रमाण असें आहे कीं, क्रांतिवृत्ताच्या पातळीशीं ज्यांच्या कक्षांच्या पातळयांचें तिर्यक्त्व २० अंशांपेक्षां जास्त नाहीं, असे धूमकेतु मात्र सूर्याभोंवतीं दीर्घ वर्तुळांत फिरत आहेत. सूर्याकडे जाण्याच्या धूमकेतूच्या वेगामध्यें फरक पाडणारें, ग्रहांचें आकर्षण किंवा सामर्थ्य, ग्रह व धूमकेतु यांच्या कक्षांच्या पातळयांच्या मधील कोनाच्या, म्हणजे तिर्यक्त्वाच्या कोटीज्येवर आणि त्यांच्यामधील अंतराच्या वर्गाच्या व्युत्क्रमावर, अवलंबून असतें ही गोष्ट ले. २२ वरून दिसून येतें. DAB तिर्यक्त्व जसजसें वाढतें तसतशी त्याची कोटिज्या कमी कमी होत जाते. म्हणून ग्रहाचें पूर्वोक्त सामर्थ्य कोटिज्ये-प्रमाणें कमी कमी होत जाणें साहजिक आहे. यांवरून असें सिद्ध होतें कीं, २० अंशापेक्षां जास्त कक्षातिर्यक्त्व असणाऱ्या धूमकेतूंना, गुलाम करण्याचें सामर्थ कोणत्याही ग्रहांत नाहीं. यांवरून आणखी असेंही दिसून येतें कीं, सूर्यकक्षेची पातळी, क्रांतिवृत्ताच्या पातळीहून फारशी भिन्न नसावी. यामुळें सूर्यकक्षेच्या सूर्यस्थानीय स्पर्शरेषेच्या दिशेंत, किंवा दिशेच्या जवळ भ्रमण करणारे धूमकेतु मात्र, ग्रहांच्या तावडींत सांपडतात. परंतु या रेषांच्या लंब पातळींत दूर असणारे धूमकेतु ग्रहांना दाद न देतां, सूर्याला फक्त एकदां सलामी देऊन चालते होतात. एकदां एक धूमकेतु गुरूच्या फार जवळ आल्यामुळें उभयतांची झटापट झाली. तींत धूमकेतु गुरूभोंवतीं २।२ प्रदक्षिणा करून निसटून गेला. सुमारें २०० धूमकेतूंच्या कक्षेंतील नीचें, कक्षा-तिर्यक्त्वें, कक्षासंपातस्थानें इत्यादि महत्त्वाच्या गोष्टींचें गणित करून आम्हीं एक यादी तयार केली आहे. यांपैकीं १०० धूमकेतूंची गति अनुलोम आहे आणि बाकीच्यांची विलोम आहे. येवढ्यावरूनच, ते सूर्य संस्थेच्या बाहेरचे रहिवाशी असावें, हें मत बरेंच संभवनीय दिसतें. उल्का व धूमकेतु यांचा निकट संबंध आहे, असें बहुतेक सिद्ध झालें आहे. अशनींतील द्रव्याच्या पृथक्करणावरून, सर्व ब्रह्मांडांतील द्रव्यांचे घटक बहुतेक एकच आहेत असें दिसून येतें.

(७७) कोणीय वेग—आकृति १९ वी पहा. P ग्रह Q बिंदूकडे जातांना, तो S या सूर्याभोंवतीं PSQ येव्हढा कोन करितो. या कोनाला, त्याचा कोणीय वेग, म्हणजे ज्योतिषभाषेंत त्याची मंदस्पष्टगति असें म्हणतात. केप्लरच्या नियमाप्रमाणें दररोजच्या PSQ त्रिकोणांचें क्षेत्रफल समान असतें. तथापि कोन PSQ नित्य निराळा असतो इतकेंच नव्हें तर प्रतिक्षणीं त्याचें मान निराळें होत असतें 'प्रतिक्षणं सा न समा' असें भास्कराचार्यांनीं जें म्हटलें आहे तें खरें आहे. म्हणून Q बिंदू P ला अत्यंत समीप असतांनां PSQ कोनाचें जें मान असेल, त्यालाच कोणीय वेग (*angular velocity*) म्हणतात. QT/SQ ही PSQ कोनाची भुजज्या आहे. Q बिंदु P च्या समीप जाईल तसतशी QT रेषा घटत जाते. आणि SQ रेषा वाढत शेवटीं ती SP येव्हढी होते. म्हणून संहितावस्थेतील कोनालाच कोणीय वेग म्हणणें बरें. या कोनाला W ही संज्ञा देऊं. तर संहितदर्शेत—

$$Sin\ W = \frac{QT}{SP}$$; यांच्या अंशच्छेदांनां SP नें गुणून

$$Sin\ W = \frac{QT \cdot SP}{SP^2}$$; परंतु $SP \cdot QT = h$ (लेख ६०)

$$\therefore Sin\ W = \frac{h}{SP^2}$$; यापासून $h = Sin\ W \cdot SP^2$.



प्रकरण १२ वें.

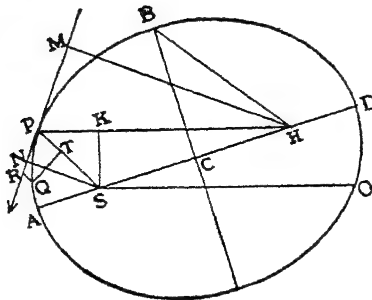


वेधावरून कक्षेचा निर्णय.

(७८) सूर्याचें आकर्षण अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत बदलतें असें प्रकरण ११ वें यांत सिद्ध झालेलें आहे. त्याचें मूलमान (μ) याचीहि सूक्ष्म किंमत पृथ्वीच्या प्रदक्षिणाकालावरून ठरलेली आहे (लेख ३७ पहा). आतां सूर्यापासून SP या अंतरावर, या अंतराशीं SPR हा स्पार्शिककोन करून, PSQ या दैनिक कोणीय वेगानें पुढें जाणारा असा एकादा नूतनग्रह, अथवा धूमकेतु आढळून येईल तर, त्याच्या **कक्षेचा आकार,**

उच्चाचें स्थान, आणि **प्रदक्षिणाकाल**, या गोष्टींचा निर्णय कसा करतां येतो तें सांगतों. (आकृति १९ वी पहा). यांत SQ रेघ काढिली आहे असें समजा.

असें समजा कीं, S या सूर्यावरून पहाणारास, P ग्रह, O या रेवतीतान्यापासून $\angle OSP$ इतक्या कोनावर कोणा एका क्षणीं दिसत आहे. आणि पुढें लिहिलेल्या तद्विषयक ज्ञात गोष्टींवरून ज्ञेय गोष्टी ठरविण्याचें आहे.



आकृति १९

ज्ञातगोष्टी=$\angle OSP$ (कोण) $\angle SPR$ (कोण).

SP रेषा; PR रेषा;

$$2QR = \frac{\mu}{SP^2}$$

QR, SP समांतर रेषा

QT लंब $= PR \ Sin \ SPR.$

ज्ञेयगोष्टी=OSD उच्चभोग;AC=मध्यमांतर,CS केन्द्रच्युति,व प्रदक्षिणाकाल.

(७९) वरील ज्ञात गोष्टींवरून सिद्ध होणाऱ्या शंकुच्छिन्नाकृति कक्षेला PR ही वेगदर्शक रेषा, तिची स्पर्शरेषा, असली पाहिजे. PR रेषा, मागें M पर्यंत वाढवून MPH कोन RPS कोनाएवढा करून PH रेषा काढली तर शंकुच्छिन्नाच्या धर्माप्रमाणें, H हा दुसरा फोकस, PH रेषेंत कोठें तरी असला पाहिजे. म्हणून पहिल्यानें PH रेषेची लांबी ठरविली पाहिजे.

SPH कोन=(180°–$2SPR$ कोन) हा माहीत होतो आणि SK रेषा PH रेषेवर लंब आहे म्हणून (PK पाया $= SP \ Cos \ SPH$) हाही माहीत होतो.

विवरणाच्या सोयीसाठीं PH रेषेची लांबी माहीत झाली आहे असें गृहीत धरून $SP+PH$ येवढ्या दोऱ्यानें $APBD$ ही दीर्घ वर्तुलावर कक्षा काढिली आहे. $ASCHD$ हा तिचा महाव्यास आहे. AC महाव्यासार्ध आहे. BC लघुव्यासार्ध आहे. $CS=CH$ केंद्रच्युति. हीं माहीत आहेत अशी कल्पना करूं.

(८०) सिद्धताः— SPH या त्रिकोणांत

$4\,CH^2 = SH^2 = SP^2 + PH^2 - 2\,KP \cdot PH$ (युक्ति.२ · १३.)

पुनः $4\,CH^2 = 4\,BH^2 - 4\,BC^2$ (यु. बु. १ सि. ४७)

परंतु $2\,BH = 2\,AC = SP + PH$ (दी. व. ध.)

म्हणून $4\,BH^2 = (SP + PH)^2$

आणि $4\,BC^2 = 2(2\,BC^2) = 2\,AC \cdot L$ (ले. ६३)

म्हणून $4\,CH^2 = (SP + PH)^2 - 2\,AC \cdot L$

$= (SP + PH)^2 - L\,(SP + PH)$

$= (SP^2 + PH^2 + 2\,SP \cdot PH) - L(SP + PH)$

ही $4\,CH^2$ ची किंमत पहिल्या ओळींतील $4\,CH^2$ च्या किंमतीएवढी असली पाहिजे. म्हणून यांचें समीकरण मांडण्यास हरकत नाहीं. यांच्या दुसऱ्या पक्षांत $SP^2 + PH^2$ हीं पदें साधारण आहेत. तीं बाद करून,

$-2\,KP \cdot PH = 2\,SP \cdot PH - L\,(SP + PH)$

$\therefore L\,(SP + PH) = (2\,SP + 2\,KP)\,PH$

या समीकरणापासून PH ची किंमत काढण्यासाठीं एकाक्षरी संज्ञांचा उपयोग केला तर गणित सोपें होतें म्हणून

$SP = \boldsymbol{a}$; $PH = \boldsymbol{x}$ व $KP = \boldsymbol{b}$: असें मानून वरील समीकरणाचें रूपांतर

$L\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}) = (2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{x}$ असें होतें या पासून

$$\boldsymbol{x} = \frac{La}{2(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - L}$$ यांत पूर्वीच्या किंमती

मांडून $$PH = \frac{L\,(SP)}{2\,(SP + KP) - L}$$: असें होतें

(८१) वरील PH च्या समीकरणांत L या ऋज्वीची किंमत माहीत नाहीं. ती पुढील समीकरणाच्या साहाय्यानें आणून, ती यथास्थानीं मांडून समीकरण सोडविलें म्हणजे PH याची लांबी सिद्ध होते. (ले. ८९ पहा).

$L = 2h^2/\mu$ ले. ६९ समीकरण (१)

$h = \sin W \cdot SP^2$; ले. ७७

$\mu = \cdot 00029584$; ले. ३७

(८२) मागें $QR/QT^2 = 1/L$ हें, ले. ६३, ६४ यांत आकृतिपरत्वें सिद्ध करून, L या ऋज्वीचें अचलत्व सिद्ध केलें आहे. आणि तिची किंमतही आकृतिपरत्वें निरनिराळी असते. म्हणजे L ची किंमत आकृतिनिर्णयोत्तर समजते, असें कल्पिलें आहे. परंतु ग्रहाच्या वेधावरून अज्ञात कक्षाकृतीचा निर्णय करावयाचा असतो, म्हणून आकृति-निर्णयाशिवाय L चें स्थैर्य व तिची किंमत सिद्ध करण्याचा प्रकार पुढें दाखविला आहे.

प्रकरण ९ वें. लेख ३६, ३७ यांतील समीकरणें पहा.

$F \cdot SP^2 = 2h^2 \cdot QR/QT^2 = \mu =$ स्थिरांक

$\therefore \mu = F \cdot SP^2$; आणि $F = 2QR$; संहितदर्शेत.

$\therefore \mu = 2QR \cdot SP^2$ आणि

$h^2 = SP^2 \cdot QT^2$ ले. ६० समी. (b)

$$\therefore \frac{\mu}{2h^2} = \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L}; \quad \text{ले. ६३. ६४.}$$

यांत $\mu/2h^2$ ही बाजू स्थिर आहे म्हणून QR/QT^2 ही बाजूही स्थिर असली पाहिजे. आतां L ची किंमत काढणें. (आकृति १९).

$QT^2 = PR^2 \cdot Sin^2\, SPR$; संहिद्दर्शेत;

आणि $QR = \frac{\mu}{2\, SP^2}$

$$\therefore L = QT^2 / QR = \frac{2\, PR^2 \cdot Sin^2\, SPR \cdot SP^2;}{\mu}$$

(८३) **आकृतीचा नियमितपणा**–आकर्षणें उत्पन्न होणाऱ्या आकृतीचे ठायीं, नियमितपणा येण्याला दोन अटी असल्या पाहिजेत. १ ली, आकर्षणाचा रोंख आकर्षकाकडे असणें. व २ री, आकृष्यमाण आणि आकर्षक यांच्या मधील अंतरावर, आकर्षण अवलंबून असणें. म्हणजे आकर्षण व अंतर यांचा नित्य व नियमितसंबंध असला पाहिजे. अथवा परमाणुगणित भाषेप्रमाणें आकर्षण अंतराचें फलित (*function*) असलें पाहिजे. परमाणुगणित पद्धतीनें हा संबंध $a = f(R)$ असा दाखविला जातो. हा संबंध अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असो किंवा सरळ प्रमाणांत असो, किंवा अंतराच्या सरळ घन प्रमाणांत असो, अथवा पंचघातप्रमाणांत असो, किंवा दुसऱ्या कांहीं तरी प्रमाणांत असो. पण संबंध असणें ही मुख्य गोष्ट आहे.

$F \cdot SP^2 = h^2 \cdot \frac{2QR}{QT^2}$: या समीकरणांत, ले. ६० (d) प्रमाणें

$F = 2\ QR$ आहे आणि $h^2 = SP^2 \cdot QT^2$ आहे. यांत कक्षाकृति व आकर्षकाचें स्थान, यांस अनुसरून दुसऱ्या पक्षाचें जें रूपांतर होतें, त्यांतील स्थिरावयवास μ म्हणतात. अर्थात् त्यांतील चर अवयवानुसार आकर्षण F बदललेंच पाहिजे. ले. ९८. पहा.

वरील साधारण समीकरणांत पूर्वोक्त पहिली अट मोडिली तर रोजचें क्षेत्र h, चल होऊन कक्षाक्षेत्र अनियत होतें. दुसरी अट मोडिली तर कक्षेचा आकार अनियत होतो. या दोनही अटी मोडल्या तर अंधारांत कोलीत फिरविल्यापासून जी अनियत कक्षाकृति दृष्टीस पडते तशा प्रकारच्या गणितबाह्य ग्रहकक्षा होतील.

इतर ग्रहांच्या आकर्षणामुळें पूर्वोक्त दोनही अटी अत्यल्प अंशानें मोडल्या जातात. त्यामुळें ग्रह काटेकोर दीर्घ वर्तुलांत कधींही फिरूं शकत नाहींत. म्हणून गणिताच्या सोयीसाठीं एक मध्यम कक्षा व तिचे मूलांक कल्पिले असतात. या मूलांकावरून येणाऱ्या दीर्घवर्तुलीय स्थानाच्या वर, खालीं, डावीकडे, उजवीकडे, कोठें तरी जवळ ग्रह हिसके खात असतो. यावरून, इतर ग्रहांचें आकर्षण म्हणजे एक प्रकारची पीडाच आहे. म्हणून या त्यांच्या परस्पराकर्षणाला परिपीडन (*Perturbation*) हें नांव आम्हीं योजिलें आहे.

परिपीडनाचे गणिताचे नियम, आकर्षणाच्या नियमाला अनुसरून असले तरी, आकृष्ट व आकर्षक यामधील अंतरें व दिशा फारच त्वरेनें बदलत असतात, यांमुळें आकर्षणाची ईयत्ता व दिशा ठरविणें महाप्रयासाचें काम होऊन बसतें. असो.

विश्वकर्म्यानें आकर्षणशक्तीमध्यें या दोन अटीचा अभिनिवेश केला नसता तर ग्रह सूर्याला सोडून कोणीकडे भरकटले असते याचा त्यालाच थांग लागला नसता. म्हणून तो **महागणिती** व **दूरदर्शी** असला पाहिजे.

(८४) **आकर्षण व प्रकाश यांचें साधर्म्य**—एक शंकाकृति प्रकाशाचा झोत, एका दिव्यापासून निघाला आहे असे समजा, तर दिव्यापासून एकेक फूट अंतरावर त्याचें जें वर्तुलाकार तळ असतें, त्याच्यापेक्षां क्षेत्रानें चौपट मोठें तळ २ फूट अंतरावर असतें, ९ पट मोठें तळ, ३ फूट अंतरा-

वर असतें. याप्रमाणें अंतराच्या वर्गाच्या सम प्रमाणांत वर्तुळाकार तळाचें क्षेत्रफळ वाढत जातें. परंतु झोतांतील प्रकाशाचे परिमाण कायम असल्यामुळें तो चौपट, ९ पट, १६ पट, क्षेत्रावर वाटला जातो. म्हणून त्याची तीव्रता $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ म्हणजे अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत कमी होत जाते. याचप्रमाणें आकर्षण हें प्रकाशाप्रमाणेंच, एकाच बिंदूपासून निघणाऱ्या अत्यंत बारीक अशा तंतूचा झोत आहे, अशी कल्पना केली तर तंतू अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत विरल होत गेल्यामुळें तज्जन्य आकर्षणही त्याच प्रमाणांत विरल होत जाणें स्वाभाविक आहे.

(८५) **कक्षेचा आकार**—ले. ८० याच्या शेवटीं, सिद्ध केलेल्या समीकरणांत त्या त्या राशीच्या किंमती मांडून समकिरण सोडविलें म्हणजे P ग्रहापासून PH हें उच्चसंन्निध फोकसापर्यंत अंतर निघेल. सदर समीकरणाच्या दुसऱ्या पक्षाच्या छेदांतील $2(SP+KP)$ यापेक्षां L लहान असेल तर PH चें चिन्ह धन होईल; म्हणजे SP, PH या रेषा MPR स्पर्शरेषेच्या धनबाजूकडे म्हणजे जिकडे आकर्षक S आहे त्या बाजूकडे पडतील, म्हणून अशा प्रसंगीं कक्षेचा आकार **दीर्घ वर्तुल** असला पाहिजे.

$2(SP+KP)$ एवढीच जर L ही ऋज्वी असेल तर च्छेद स्थानीं शून्य जाहल्यामुळें PH ची किंमत अनंत (*infinite*) होईल, म्हणजे दुसरा फोकस MPR स्पर्शरेषेच्या धन बाजूकडे अनंत अंतरावर असेल. अर्थात् कक्षेचा आकार **पॅराबला** (*Parabola*) असला पाहिजे.

$2(SP+KP)$ पेक्षां L ही मोठी असेल तर, च्छेद ऋण झाल्यामुळें PH ची किंमत ऋण येईल. म्हणजे दुसरा फोकस MPR स्पर्शरेषेच्या ऋण बाजूकडे पडेल. ऋण बाजू म्हणजे कक्षेच्या बाहेरची बाजू, अर्थात् MPR रेषा SP, HP यांच्या मधून जाईल आणि कक्षेचा आकार **हैपरबला** होईल.

(८६) **कक्षापरिलेख**—कक्षा **दीर्घवर्तुलाकार** असेल तर $SP+PH+SH$ (आकृती १९) एवढा दोरा घेऊन त्यांचीं दोन्हीं टोकें जुळवून गांठ द्यावी. गांठ देण्यापासून कमी होणाऱ्या लांबीचा दोरा पूर्वींच जास्त घ्यावा. म्हणजे गांठ दिल्यावर तो दुपदरी केला तर, त्याची लांबी $\frac{1}{2}$ $(SP+PH+SH)$ इतकी भरावी. मग SH इतक्या अंतरावर २ चुका फळीवर बसवून त्याच्या भोंवतीं या गांठ दिलेल्या दोऱ्याचा वेढा घालून दोरा पेन्सिलीच्या टोकानें न निसरेल, असा ताणून धरावा. अशा ताण-

लेल्या स्थितींत पेन्सिलीचें टोंक या चुकाभोंवतीं फिरवावें, म्हणजे कक्षेच्या आकाराचें दीर्घ वर्तुल निघेल.

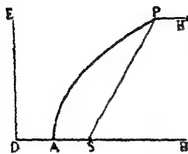
हैपरबलेचा परिलेख--(आकृति १७ अ पहा) हैपरबलेंत BA अक्षापेक्षां HS ही केन्द्रच्युति मोठी असते. उदाहरणार्थ-अक्ष १० असेल तर केन्द्रच्युति १२ असते. छत्रीची, एका टोंकाला भोंक असलेली एक पोलादी सळई घेऊन, तिच्या भोंक नसलेल्या टोकाला, एक दोरा बांधावा. आणि या दोऱ्याच्या दुसऱ्या टोंकाला एक फांस करावा. सळईला दोरा लावून धरला तर सळईचें भोंक आणि दोऱ्याच्या फांसाचें टोंक यांमध्यें BA अक्षा एवढें अंतर राहील इतका तो दोरा लांब असावा. म्हणजे

(सळई – दोरा) = अक्ष $BA = (HP - PS)$ असें असावें. मग एका फळीवर, केन्द्रच्युति एवढ्या अंतरावर H व S हे दोन बारीक मोळे बसवून त्यापैकीं H मोळयाभोंवतीं सळईचें भोंक बसवावें, आणि दोऱ्याचा फांस दुसऱ्या S मोळया भोंवतीं बसवावा. मग एक पेन्सील घेऊन तिचें टोंक सळईला लागलेलें राहील अशा प्रकारें तिच्या योगानें तो दोरा ताणून धरावा व अशा ताणलेल्या स्थितींत H टोंकाभोंवतीं सळई हळूहळू फिरवावी म्हणजे पेन्सिलिच्या टोंकानें इष्ट हैपराबला आकृती निघेल.

सळई S मोळयाला लावून दोरा ताणला तर जेथें पेन्सिलीचें टोंक राहतें, तो हैपरबलेचा A शिरोबिंदू जाणावा. H मोळयाभोंवतीं फांस व S मोळयाभोंवतीं सळईचें भोंक बसवून, पूर्वीप्रमाणें दोरा ताणून धरून जी आकृति निघते ती हैपराबलेची दुसरी शाखा होते. B हा दुसऱ्या शाखेचा शिरोबिंदू होतो. आणि H हा दुसऱ्या शाखेचा फोकस होतो. सूर्यामध्यें आकर्षणाबद्दल, उत्सारण शक्ति असती तर धूमकेतू हैपरबलेच्या दुसऱ्या शाखेंत फिरले असते.

कक्षा **पराबलाकार** असेल तर, (आकृति २० पाहा) पूर्वीप्रमाणें सळई न घेतां EDH हा गुण्या घेऊन त्याच्यायोगानें EDH हा काटकोन काढावा. आणि ED रेषेला नियन्त्री (*Directrix*) म्हणावें. त्याच्या एका बाजू इतका म्हणजे HD इतका लांब दोरा घेऊन, त्याचें एक टोंक, गुण्याच्या H टोंकाला बांधावें. $DS = \frac{1}{2} L$ करून, S या जागीं एक चूक बसवून तिच्या भोंवतीं दोऱ्याच्या दुसऱ्या टोंकाचा फांस बसवून द्यावा. मग गुण्या EDH या स्थितींत असतांना A या पेन्सिलीच्या टोंकानें तो

ताणावा. म्हणजे $DA=AS$ होईल आणि A हा पराबलेचा शिरोबिंदू होईल. मग तो गुण्या असा हळूहळू वर सरकवावा कीं, त्याची DE बाजू DE या नीयन्त्रीला लागली राहील, आणि पेन्सिलीचें टोंक असें ताणून धरावें कीं दोरा गुण्याच्या दुसऱ्या DH या बाजूला लागून राहील. असें केलें असतां पराबलेची आकृति निघते. (आकृति २० पहा.)



(आकृति २०)

(८७) आकृतीच्या अटी–

दीर्घवर्तुलांत $PH+SP$ ही बेरीज अचल असते. हैपरबलेंत $PH-SP$ ही वजाबाकी अचल असते. आणि पराबलेंत PH रेषा AH या व्यासाला समांतर असून तिची लांबी अनंत असते.

पराबला ही हैपरबला व दीर्घवर्तुळ यांच्या मधील सीमा आहे. म्हणून हिच्यांत या दोन्ही आकृतीचे गुण वास करितात.

$\therefore$ पराबलेंत, अनंत $\pm SP =$ अनंत अचल.

(८८) कक्षानिर्णयाचें सांख्य उदाहरण.– एथपर्यंत गोलद्वय-प्रश्नविमर्श या अभीष्ट विषयाचें विवेचन झालें. परंतु हें सर्व विवेचन प्रायः सांकेतिक अक्षरांनीं केलें असल्यामुळें, वाचकांना त्यापासून खरा आनंद वाटणार नाहीं. म्हणून पूर्वसिद्ध सूत्रांतील, सांकेतिक अक्षरांबद्दल तद्दर्शित संख्यांचा उपयोग करून, एक उदाहरण सोडवून दाखवितो. वेध लब्ध अंकाबद्दल आमच्या मराठी ग्रहगणितांतील मंगळाच्या उदाहरणांतील अंक घेऊं. पान २१ यांतील मंगळांचें रविमध्यगणित पहा.

उदाहरण—मंगळाच्या वेधावरून ता. २ ज्यानेवारी इ. स. १९०७ पारिसचे दोन प्रहर (मध्यम) या वेळची मंगळाच्या कक्षेसंबंधीं खालीं दर्शविलेलीं मानें उपलब्ध झालीं आहेत, असें समजून, त्याच्या साहाय्यानें मंगळाच्या नीच स्थानाचा भोग, त्याच्या कक्षेची केन्द्रच्युति, त्याचें सूर्यापासून मध्यमांतर, आणि प्रदक्षिणाकालाचे दिवस, या गोष्टी सिद्ध करा. (आकृति २१ पहा).

वेधसिद्ध राशि.

१. मंगळाचा निरयण रविमध्य स्पष्ट भोग विक्षेपवृत्तावर OSP कोन...	१६५°	३०.′०
२. दिनगति (संहितदर्शेत) $W=\angle PSQ$...	०	२७.१

३.	मंदकर्ण व स्पर्शरेषा यांच्या मधील कोण $\angle SPR$ ...	८६	५१·०
४.	सूर्यापासून मंगळापर्यंत सरळरेषा–रुप अंतर–मंदकर्ण (SP).		१·६३७४.

(८९) प्रथम ८१ लेखांतील समीकरणापासून h व L यांचीं मानें काढावीं. $h = Sin\ W \cdot SP^2$ आहे.

		घातांक
$Sin\ W$	= Sin २७·१	७·८९६६६
SP^2	= (१·६३७४)^2	०·४२८३१
h	= ·०२११३४, द्विगुण दैनंदिन क्षेत्र, बेरीज	८·३२४९७
नंतर $L = 2h^2/\mu$ आहे.		
h^2	= (·०२११३४)^2	६·६४९९४
2	=	·३०१०३
$2h^2$	... ... बेरीज,	६·९५०९७
μ	= ·०००२९५८४	६·४७१०५
L	= ३·०१९४ ऋज्वी, बाकी	०·४७९९२

या नंतर $PK = SP \cdot Cos$ (१८०° – २SPR) लेख ७८, या सूत्रापासून PK चें मान आणलें म्हणजें, PH चें मान ठरवितां येतें. (१८०° – २ SPR) = (१८०° – १७३°, ४२′) = ६° । १८′

		घातांक
SP	= १·६३७४	०·२१४१५
COS ६° । १८′		९·९९७३७
PK	= १·६२७५ बेरीज	०·२११५२

आतां वर आणलेलीं मानें खालील समीकरणांत ठेवून तें सोडविलें म्हणजे PH हें दुसऱ्या फोकसाचें अंतर निघतें.

$$PH = \frac{L \cdot SP}{2(SP+KP)-L} = \frac{३·०१९४ \times १·६३७४}{३·५११०४}$$

$$= १·४०८४ ;$$

			घातांक
L	= ३·०१९४	... ...	०·४७९९२
SP	= १·६३७४	... ...	०·२१४१५
$L \cdot SP$		बेरीज	०·६९४०७
२$(SP+PK)-L$=	३·५१०४		०·५४५३५
PH	= १·४०८४	बाकी	०·१४८७२

(९०). (आकृति २१ पहा). आतां SPH त्रिकोणाच्या SP, PH या दोन बाजू आणि त्यांच्या-मधील कोन SPH, यांचीं मानें सिद्ध झालीं आहेत. यापासून **त्रिकोणमितीनें** बाकीचे अज्ञात असें $\angle PSH$, $\angle PHS$ हे दोन कोन आणि तिसरी बाजू SH यांचीं मानें ठरवितां येतात. प्रस्तुत प्रसंगीं पुढील त्रिकोणमितीच्या सूत्राचा उपयोग केला पाहिजे.

आकृति. २१.

जशी त्रिकोणाच्या दोन बाजूची बेरीज,
त्याच दोन बाजूच्या वजाबाकीस होते,
तशी त्यांच्या समोरील कोनाच्या ऐक्यार्धाची स्पर्शरेषा
त्याच कोनाच्या वजाबाकीच्या अर्धाच्या स्पर्शरेषेस होते.

म्हणजे—

$$\frac{(SP+PH)}{(SP-PH)} :: \frac{\tan\frac{1}{2}(\angle PHS+\angle PSH)}{\tan\frac{1}{2}(\angle PHS-\angle PSH)};$$

याप्रमाणें अव्यक्त दोन कोनांच्या वजाबाकीचें अर्ध निघतें. व्यक्त SPH कोन १८० अंशांतून वजा केला तर, बाकी अव्यक्त दोन कोनांची बेरीज राहते. तिसऱ्या अव्यक्त SH बाजूचें मान, व्यक्त झालेल्या दोन कोनांपैकीं, कोणताही एक कोन, आणि त्याच्या समोरील बाजू, यांच्या गुणोत्तरापासून निघतें.

$\frac{१}{२}$ ($१८०^0 - ६^0 \cdot १८'$) = $८६^0 - ५१'$ हे अव्यक्त दोन कोनांच्या बेरजेचें अर्ध जाहलें.

		घातांक
(१·६३७४–१·४०८४) = ०·२२९०.		९·३५९८३
tan ८६°,५१′ ...	...	११·२५९३७
	बेरीज	२०·६१९२०
(१·६३७४+१·४०८४) = ३·०४५८.		१०·४८३७०
tan ५३°·४८′	बाकी	१०·१३५५०

∴ कोन PSH= (८६°,५१′–५३°,४८′) = ३३°,३′

∴ कोन PHS= (८६,५१′+५३°,४८′) = १४०°,३९′

आतां SH या दोन फोकसांमधील अंतर काढिलें पाहिजे. तें पुढील त्रैराशिकानें निघतें.

$Sin\ PSH : Sin\ SPH :: PH : SH$·	घातांक
$Sin\ SPH$ (६°′१८′)	९·०४०३४
PH = १·४०८४	०·१४८७२
बेरीज	९·१८९०६
$Sin\ PSH$ = Sin ३३°,३′	९·७३६६९
SH = ०·२८३४ .... बाकी	९·४५२३७

(९१) याप्रमाणें PSH या त्रिकोणाचे ६ ही अवयव व्यक्त जाहले आहेत. आतां त्यांचा उपयोग कसा करावयाचा तें सांगतो.

$OSP - PSH$ = (१६५°–३३°·०) = १३२°,५ हा मंगळाच्या कक्षेचा **उच्च**बिंदूचा भोग झाला. यांत १८०° मिळविल्यानें ३१२°·५ हा **नीच** स्थानाचा भोग झाला.

$SP + PH$ = (१·६३७४ + १·४०८४) = ३·०४५८ हा बृहदक्ष झाला. यानें दोन फोकसांतील अंतर SH = ·२८३४ याला भागून, भागाकार ०·०९३० ही कक्षेची **केन्द्रच्युति** झाली. **बृहदक्ष** ३·०४५८ याचें अर्ध १·५२२९ हें त्याचें **मध्यमांतर** झालें.

क्लेपरच्या तिसऱ्या नियमाप्रमाणें, पृथ्वीच्या वर्षमानांवरून मंगळाचा **प्रदक्षिणा काल** काढितां येतो. (लेख ७० वा समी. C पहा.) यांतील सचिन्ह मानें मंगळाचीं व चिन्ह नसलेलीं पृथ्वीचीं समजूं. तर

$$\frac{P^2}{AC^3} = \frac{P_,^2}{AC_,^3} \therefore P_,^2 = \frac{AC_,^3 \times P^2}{AC^3}.$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{(१\cdot५२२९)^3 \times (३६५\cdot२५६३)^2}{१^3}}$$

$= ६८४\cdot४५७$ दिवस.

प्रकरण १४ वें.

पतनावरून कक्षानिर्णय.

(९२) मागील प्रकरणांत L ऋज्वीच्या मदतीनें ग्रहापासून उच्च संनिधवर्ति फोकसापर्यंत असणारें अंतर PH आणून कक्षानिर्णय केला आहे. येथें ग्रहाच्या रेखीय वेगोत्पादक, (S) या **पतनाच्या** मदतीनें तेंच काम केलें आहे. वेगोत्पादक पतन म्हणजे, P स्थानीय सूर्याचें आकर्षण, एक दिवस अविकारी कल्पून त्या आकर्षणामुळें ग्रहाच्या अंगांत P स्थानीय वेग उत्पन्न होण्याला, त्याला सूर्याकडे PS दिशेनें किती लांब जावें लागलें असतें, तें अंतर. लेख २७ यांत, धबधब्याच्या कड्या-वरून सोडलेल्या दगडाच्या अंगांत, पृथ्वीच्या पृष्ठभागाजवळ अचल मानले-ल्या पृथ्वीच्या आकर्षणामुळें, दर सेकंदांत २४० फूट वेग उत्पन्न होण्यास, जसें त्याला कड्याखालीं ९०० फूट उतरावें लागतें, त्याप्रमाणेंच तेथें ग्रहरूपी पाषाणाचें सूर्याकडे पतन होतें, असें समजावें. वेधावरून रेखीय वेग कळत नाहीं. कोणीय वेग मात्र पाहिजे तितका सूक्ष्म ठरवितां येतो म्हणून प्रथम W या कोणीय वेगावरून, V **रेखीय वेग** ठरविण्याचें समी-करण खालीं सिद्ध केलें आहे.

(९३) आकृति १६ पहा. संहितावस्थेंत PQ हा रेखीय वेग असतो. व $PSQ = W$ हा कोणीय वेग असतो. लेख ७७. त्रिकोण मिती प्रमाणें:—

$PQ = QT \text{ Cosec } SPR$; दोन्ही पक्षांस SP नें भागून

$\frac{PQ}{SP} = \frac{QT}{SP} \text{ Cosec } SPR$; यांत $\frac{QT}{SP} = \text{Sin } W$;

$$V = PQ = SP \text{ Sin } W \cdot \text{Cosec } SPR \quad\ldots\ldots (1)$$

नंतर V आणि S यांचा संबंध पुढें लिहिल्याप्रमाणें काढितां येतो.

$S = \frac{V^2}{2F}$; ... ... लेख ७२ समीकरण (४)

यांत $F = \frac{\mu}{SP^2}$; आहे. ... (लेख ३७) म्हणून;

$S = V^2 \cdot \frac{SP^2}{2\mu}$ हें रेखीय वेगोत्पादक पतनाचें समीकरण झालें......(१)

(९४) कृत्य:–आतां या वेगोत्पादक अध:पतनाच्या साहाय्यानें, असें एक दीर्घवर्तुळ सिद्ध करावयाचें कीं, ज्याचा एक फोकस S या सूर्यस्थानीं असून, ज्याचा परीघ P मधून जाईल; आणि ज्याचें P बिंदूतील वेगोत्पादक पतन पूर्वोक्त वेधलब्ध S या पतनासमान असेल.

पुढील २२ व्या आकृतींत S पतन, SP या मंदकर्णापेक्षां कमी आहे असें समजा. (पहा टीप, ले.९५) PS रेषेंत S येवढा PK तुकडा पाड,आणि ZPH कोन VPS कोना एवढा कर. PH रेषेंत $PL = SK$ कर;आणि SKL या तीनहि बिंदूंतून जाणारें $SKLH$ हें वर्तुळ काढ; आणि PL रेषा या वर्तुळाला H या बिंदूंत मिळेपर्यंत वाढीव.

नंतर $S, H,$ हे फोकस कल्पून, $SP+HP$ येवढा बृहदक्ष घेऊन,लेख८६ यांत सांगितल्याप्रमाणें APB हें दीर्घवर्तुळ काढ.हीच इष्ट ग्रहाची कक्षा होईल.

आकृति २२.

समजा कीं, विवक्षित ग्रह S सूर्याभोंवतीं BP दिशेनें फिरत P स्थानीं आला आहे. तर लेख ७२ समीकरण (५) प्रमाणें येणारें P येथील पतन, पूर्वोक्त वेध-लब्ध पतना येवढें असेल तरच, हें दीर्घवर्तुल त्या ग्रहाची कक्षा आहे असें म्हणतां येईल. म्हणून तुलनेसाठीं लेख ७२ समीकरण (५) प्रमाणें, पतन काढून, तीं दोनहि समान आहेत असें दाखविलें पाहिजे.

(९५) **सिद्धता**– दीर्घवर्तुळांतील अथवा तदितर कोणत्याही आकृतींतील P स्थानाचें पतन, तेथून फोकसाकडे जाणाऱ्या तात्कालिक वर्तुलाच्या ज्येच्या, चतुर्थांश असतें, असें मागें सिद्ध केलें आहे.

$S = \frac{1}{4} PW$, लेख ७२ समीकरण (५), म्हणून PW या फोकसांतून जाणाऱ्या, तात्कालिक वर्तुळाच्या ज्येच्या, चतुर्थांशांची किंमत

काढून, ती वरील आकृतींतील PK येवढीच आहे, असें सिद्ध करून दाखविलें पाहिजे. म्हणजे—

$\frac{1}{4} PW = PK$ ही गोष्ट सिद्ध केली पाहिजे. लेख ५७ आकृति १४, यांत PW या फोकसांतून जाणाऱ्या रेषेला PSZ हें नांव दिलें आहे. आपण त्याबद्दल येथें PW हेंच नांव देऊं.

$PW = 2 \frac{CD^2}{AC}$; लेख ५७, म्हणून

$\frac{1}{4} PW = \frac{CD^2}{2AC} = \frac{(\text{युग्मव्यासार्ध})^2}{\text{बृहदक्ष}}$

$= \frac{SP \cdot HP}{SP + HP}$; दीर्घवर्तुल धर्माप्रमाणें.

या अपूर्णांकाच्या अंशच्छेदांना HP नें भागून

$\frac{1}{4} PW = \frac{SP}{1 + \frac{SP}{HP}}$;.................... (a)

वरील आकृति २२ यांत, $SKLH$ हें एक वर्तुल असून, त्याच्या बाहेरच्या P बिंदूपासून त्याला छेदून जाणाऱ्या, PKS व PLH या दोन रेषा काढल्या आहेत. म्हणून युक्लीड पु. ३ सि. ३६ प्रमाणें—

$SP \cdot PK = HP \cdot PL$; ....(b)

$\therefore \frac{SP}{HP} = \frac{PL}{PK}$.

हे दोनीही अपूर्णांक समान असल्यामुळें, वरीलें (a) समीकरणांत त्यांची अदलाबदल करण्यास हरकत नाहीं.

$\frac{1}{4} PW = \frac{SP}{1 + \frac{PL}{PK}} = \frac{SP \cdot PK}{PK + PL} = PK$.

कारण, $PK + PL = SP$;

म्हणून $\frac{1}{4} PW = PK$　　　ही इष्ट गोष्ट सिद्ध झाली.

टीप— S, हें वेगोत्पादक पतन जेव्हां SP पेक्षां लहान असतें, तेव्हां कक्षा दीर्घवर्तुलाकार असते, आणि जेव्हां $S = SP$ असतें, तेव्हां कक्षा पराबलाकार असते. आणि जेव्हां तें, SP पेक्षां मोठें असतें, तेव्हां कक्षा हैपरबला असते असें समजावें. पहा लेख ८५ आणि या लेखांतील समीकरण (३ रें).

(९६) वेधसमयीं अव्यक्त असलेली कक्षा, याप्रमाणें व्यक्त झाल्यावर, तिचा अक्ष व अक्षाची आकाशांतील स्थिति, यांचा निर्णय करणारीं समीकरणें सिद्ध केलीं पाहिजेत.

आकृति २२ वी पहा. गणितलाघवार्थ तिच्या अवयवासंबंधीं पुढील पारिभाषिक अक्षरें योजिलीं आहेत. SV, HZ हे, VPZ स्पर्शरेषेवर लंब आहेत.

a = बृहदक्षार्ध	$PK = S$.
b = लघ्वक्षार्ध	$PL = (r-S)$.
L = ऋज्वी	$PH = (2a-r)$.
e = केंद्रच्युति	SO = रेवती दिग्रेषा.
$r = SP$	$A = SPV$ कोन.

(ले.९५ समीकरण b) $PL \cdot PH = PK \cdot SP$ यांत वरील किंमती मांडून—

$$(r-S)(2a-r) = S \cdot r, \text{ यापासून}$$
$$2a(r-S) - r^2 + S \cdot r = S \cdot r,$$
$$2a(r-S) - r^2 = O.$$
$$a = \frac{r^2}{2(r-S)} \dots\dots\dots\dots (3)$$

आतां b या लघ्वक्षार्धाचें समीकरण तयार करूं.

$$b = \sqrt{SV \cdot HZ} = \sqrt{SP \cdot Sin\, A \cdot HP\, Sin\, A \cdot}$$

(दी. व. धर्म)

$$= \sqrt{SP \cdot HP} \cdot Sin\, A;$$

$\sqrt{SP \cdot HP}$ याचें रूपांतर करण्यासाठीं थोडा संचार केला पाहिजे. वरील समीकरण—

$PL \cdot HP = PK \cdot SP$, यांच्या प्रत्येक पक्षाला SP नें गुणून.

$$PL \cdot HP \cdot SP = PK \cdot SP^2.$$

$$HP \cdot SP = \frac{PK \cdot SP^2}{PL} = \frac{S \cdot r^2}{(r-S)};$$

$$\therefore\ b = \frac{\sqrt{S \cdot r^2}}{\sqrt{(r-S)}} \cdot Sin\,A = \frac{(r^2 \cdot S)^{\frac{1}{2}}}{(r-S)^{\frac{1}{2}}} \cdot Sin\ A \quad (4)$$

$$L = \frac{2\,b^2}{a} = \frac{2\,r^2 \cdot S}{(r - S)} \cdot Sin^2 A\, \frac{2\,(r-S)}{r^2}\ ;\quad \text{ले. ६३}$$

$$= 4 \cdot S \cdot Sin^2\ A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$HP = \frac{PK \cdot SP}{PL} = \frac{S \cdot r}{(r-S)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

आतां AB या नीचोच्च रेषेची. म्हणजे बृहदक्षाची, आकाशांत रेवती संबंधानें स्थिति (*Position*) समजण्यासाठीं, PSH कोनाचें, मंद-केंद्र दर्शन कोनाचें, मान ठरविलें पाहिजे. आकृति २२ वी येथें SM रेषा VZ या स्पर्शरेषेला समांतर काढून, ZH लंब वाढविला तर तो SM रेषेला M या बिंदूंत छेदितो असें समजा. अर्थात् $VSMZ$ हा काटकोन चौकोन आहे.

$$Sin\angle\ HSV = cos\angle\ HSM = \frac{SM}{SH}\ ;$$

$$\frac{SM}{SH} = \frac{(SP + PH)\ cos.\ SPV}{e.\ 2\ AC}$$

परंतु $(SP + PH) = 2\ AC$

$$= \frac{(SP + PH)\ cos\ SPV}{e\,(SP + PH)}$$

$$Sin\ HSV = \frac{1}{e}\ cos\ \ SPV = \frac{1}{e}\ cos\ \ A \ \ldots\ldots\ldots (8)$$

याप्रमाणें HSV कोनाचें मान कळल्यानंतर, याच्या मदतीनें PSB कोन, म्हणजे उच्चकेंद्र, आणि OSB कोन, म्हणजे उच्चस्थानाचा भोग, हे पुढील समीकरणांपासून आणावे.

उच्चकेंद्र $\angle PSB = \angle HSV - (90 - A)$ ....(9)

उच्चभोग $\angle OSB = \angle OSP - \angle PSB$............(10)

विशेष—या कक्षानिर्णयांत त्रिकोणमितिगणिताचे श्रम वांचतात.

(९७) उदाहरण—मामील प्रकरण लेख ८८, यांतील वेधसिद्ध-राशि घेऊन, वरील दहा अवयवांच्या सांख्य किंमती आणून दाखवितों.

प्रथम समी (१) ले० ९३ प्रमाणें, V या रेखीय वेगाचें मान आणूं.

			घातांक
SP	= १·६३७४		०·२१४१५
$Sin\, W$	= Sin २७′·१		७·८९६६६
$Cosec\ SPR$	= $Cosec$ ८६°·५१		१०·०००६६
V	= ०·०१२९२६	बेरीज	८·११**१**४७

विशेष पहा.—ही किंमत ७४ लेखांतील किमतीशी तंतोतंत जुळतें नंतर समी. (२), ले. ९३, प्रमाणें S ची किंमत आणतां येते.

			घातांक
V^2	... ...	...	६·२२२९४
SP^2	... ...	...	०·४२८३१
बेरीज	... ...	... बे.	६·६५१२५
μ	= ·०००२९५८४	...	६·४७१०५
वजाबाकी	... ...	... बा.	०·१८०२०
२	... ...	...	०·३०१०३
S	= ·७५७१३ = PK	... बा.	९·८१९१७

$$(३)\ \text{बृहदक्षार्ध} = \frac{r^2}{२(r-s)} = \frac{(१·६३७४)^2}{२(१·६३७४ - ·७५७१)} = १·५२३०$$

$$(४)\quad \text{लघ्वक्षार्ध} = \sqrt{\frac{(·७५७१ \times १·६३७४^2)}{(१·६३७४ - ०·७५७१)}}\ ·९९८४९ = १·५१६४$$

$$(५)\quad \text{ऋज्वी} = 4 \times S \times Sin^2 A = ३·०२८५\ Sin^2 A = ३·०१९४$$

$$(६)\quad HP = ०·७५७१३ \times १·६३७४ \div ०·८८०३ = १·४०८४$$

$$(७)\quad \text{केंद्रच्युति} = \sqrt{(१ - b^2/a^2)} = \quad = ०·०९३०$$

$$(८)\ Sin \angle HSV = \frac{·०५४९५१}{·०९३०} = ·५९०८७ = Sin\quad ३६°१३'$$

$$(९)\quad \text{उच्चमंदकेंद्र}\ PSR = (३६°,१३' - ३°,९') = ३३°·४$$

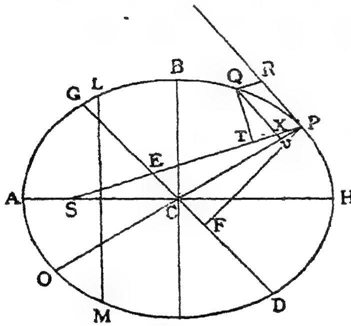
$$(१०)\quad \text{उच्चभोग} = (१६५°,५ - ३३°,१') = १३२°·४$$

$$(११)\quad \text{नीचभोग} = ३१२°·४$$

प्रकरण १५ वें.

आकर्षक पदार्थ दीर्घवर्तुलाच्या मध्यबिंदूंत असतांना आकर्षणाचा नियम ठरविणें–

(९८) आकृति १७ पहा. तेथें SP रेषा आहे ती मुळींच नाहीं असें समजा व तसेंच QT ही CP रेषेवर लंब आहे आणि डावीकडे खालील O च्या जागीं G आहे असेंही समजा. असें कल्पिल्यानंतर VQT, CPF हे सरूप त्रिकोण होतात.



आकृति १७.

$$\frac{PV \cdot VG}{QV^2} = \frac{CP^2}{CD^2} \text{; दी. व. ध.:}$$

$$\frac{QV^2}{QT^2} = \frac{CP^2}{PF^2} \text{: सरूप त्रिकोण;}$$

यांच्या गुणाकारापासून–

$$\frac{PV \cdot VG}{QT^2} = \frac{CP^4}{PF^2 \cdot CD^2} = \frac{CP^4}{AC^2\, BC^2};$$

संहित दर्शेत— $VG=2\,CP$ आणि $PV=QR$ म्हणून

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{CP^4}{AC^2 \cdot BC^2 \cdot 2\,CP} = \frac{CP^3}{2AC^2 \cdot BC^2}$$

ले. ६० यांतील सर्वसाधारण समीकरण (C) घेऊन त्यांत SP बद्दल CP आणि QR/QT^2 बद्दल वरील किंमत मांडून

$$F = \frac{2\,h^2}{CP^2} \cdot \frac{CP^3}{2\,A\,C^2 \cdot BC^2} = \frac{h^2}{AC^2 \cdot BC^2} \cdot CP;$$

यांतील स्थिरावयवाला μ हें उपलक्षण करून $F = \mu \cdot CP$; म्हणून आकर्षण अंतराच्या प्रमाणांत बदलतें हें सिद्ध.

आतां कोणत्याही बिंदूंतील वेगांचें मान काढणें:– ले. ७३ समीकरण (३) $V^2 = \frac{1}{2} F \cdot PW$ असें आहे. यांत F ची वरील किंमत आणि ले. ५५ यांतील दीर्घ वर्तुलाच्या मध्यबिंदूतून जाणारी ज्या—

$$PCX = PW = \frac{2\,CD^2}{CP}$$; ही मांडून

$$V^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{AC^2 \cdot BC^2} \cdot CP \cdot \frac{2\,CD^2}{CP}$$

$$= \frac{h^2}{AC^2 \cdot BC^2} \cdot CD^2$$

$$V = \frac{h}{AC \cdot BC}\,CD;$$ अथवा

$$V = \sqrt{\mu} \cdot CD$$

म्हणून वेग युग्मव्यासार्धाच्या प्रमाणांत असतो.

आतां प्रदक्षिणाकाल काढणें:— वरील सिद्धतेंत—

$$\mu = \frac{h^2}{AC^2 \cdot BC^2}$$ आहे. आणि

$$CD\,\frac{h}{AC \cdot BC} = \sqrt{\mu} \cdot CD,$$ म्हणून

$$h = AC \cdot BC\,\sqrt{\mu};$$ त्याचप्रमाणें—

दीर्घवर्तुलाचें क्षेत्रफल $= \pi \cdot AC \cdot BC$ असें आहे

म्हणून P = प्रदक्षिणाकाल मानिला तर

$$P = \frac{२\ \text{क्षेत्रफल}}{h} = \frac{2\,\pi \cdot AC \cdot BC}{AC \cdot BC \cdot \sqrt{\mu}}$$

$$= \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu}}$$ = स्थिरांक.

(९९) यावरून असें सिद्ध होतें कीं, एकाच बिंदूभोंवतीं काढलेल्या अनेक दीर्घवर्तुलकक्षेंत फिरणाऱ्या पदार्थांचे प्रदक्षिणाकाल, सारखेच असतात. यावरून विचार करतां सूर्याचें आकर्षण अंतराच्या सरळ प्रमाणांत असते तर, बुधापासून इन्द्रापर्यंत सर्व ग्रहांचे प्रदक्षिणा काल सारखेंच झाले असते. आणि त्यांचीं परस्परामधील क्रांतिवृत्तावरील अंतरें, (मन्द * फलसंबंधीं संस्कार सोडून दिला तर) सूर्यावरून पाहणाऱ्यांस, सर्वदा सारखींच दिसलीं असतीं. इतकेंच नव्हे तर पृथ्वीवरून पहाणाऱ्यांस देखील तीं तशीच

* हा मन्दफलसंस्कार चन्द्राच्या तिथिसंस्कारासारखा असतो. म्हणजे एका मन्द्रकेन्द्राच्या पूर्ण प्रदक्षिणाकालांत त्याची चार वेळां ऱ्हासवृद्धी होते.

दिसलीं असतीं. यामुळें ग्रहगणितही बरेंच सोपें झालें असतें. अशाप्रसंगीं फलज्योतिषांतील दृष्टी, शुभाशुभ फलें इत्यादि गोष्टी कशाप्रकारें वर्तवाव्या लागल्या असत्या त्याचा विचार करणें तज्ज्ञ फलज्योतिषी लोकांचें काम आहे.

आकाशांत कांहीं तारे ग्रहाप्रमाणें एकमेकाभोंवतीं फिरत आहेत. त्यांचा आकर्षणाचा नियम पूर्वोक्त अंतराच्या सरळ प्रमाणांत असता तर, मध्यवर्ति तारा त्यांच्या कक्षांच्या मध्य बिंदूंत दिसला असता. परंतु अशी गोष्ट कोठेंही निदर्शनास आलेली नाहीं म्हणून असें म्हणतां येईल कीं, अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्तप्रमाणाचा आकर्षण नियम सूर्यमालेंतच आहे असें नव्हे तर अखिल ब्रह्मांडांतही हा नियम पाळिला जात आहे.

(१००) **आंदोलन**—आंदोलन हें, अशाच प्रकारच्या दीर्घवर्तुळीय भ्रमणाचा एक विशेष प्रकार आहे, कारण या दोहोंत, आकर्षण अंतराच्या सरळ प्रमाणांत असणें, व कालाचलत्व, हे दोनही धर्म साधारण आहेत. (पहा ले. ३१ वा.)

प्रयोग—आंदोलन हें एक रेषारूप दीर्घवर्तुल आहे. याचें दीर्घवर्तुळीयत्व, पुढील प्रयोगानें दाखवितां येतें. एका अभिषेकपात्राला दोरीनें बांधून, तिचें दुसरें टोंक तक्तपोशींतील एका मध्यवर्ति लोखंडी कडीला बांधावें. तें असें कीं, अभिषेक पात्र निश्चल असतांना, त्याचें खालचें टोंक जमिनीपासून ५ किंवा ६ इंच वर राहील. अशा स्थितींत त्याला एक हेलकावा दिला तर, तें अभिषेकपात्र आंदोलनाचें अनुकरण करील; परंतु त्याला हेलकावा देतांना, हेलकाव्याच्या दिशेच्या लंबदिशेंत थोडा झोंका द्यावा, म्हणजे तेंच अभिषेक पात्र, दीर्घवर्तुलाकार मार्गानें फिरत राहील. या दीर्घवर्तुलाचें प्रत्यक्ष दर्शन पाहिजे असेल तर, जमिनीवर एक स्वच्छ पांढरें धोतर ताठ पसरून, अभिषेकपात्रांत काळी बारीक वाळू भरावी. म्हणजे वाळवेच्या धारेपासून धोतरावर एक सुंदर दीर्घवर्तुलाचें चित्र उत्पन्न होईल.

